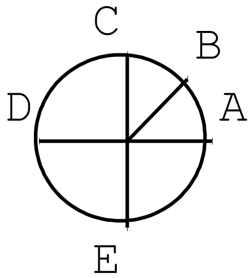
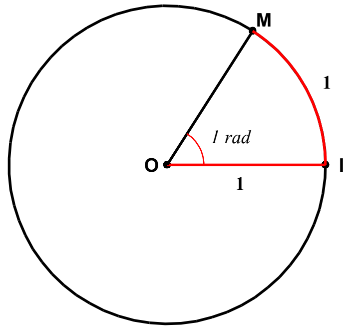
ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

I) UNE NOUVELLE MESURE D'ANGLE



Exercice préparatoire:

Soit le cercle de centre O et de rayon 1.
On donne les points A, B, C et D de ce cercle tels que $\widehat{AOB} = 45°$, $\widehat{AOC} = 90°$ et $\widehat{AOD} = 180°$
Calculer les longueurs des arcs AB , AC et AD.
On dit que ces nombres sont les mesures en radian des angles $\widehat{AOB}$ $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOD}$.



Définition:

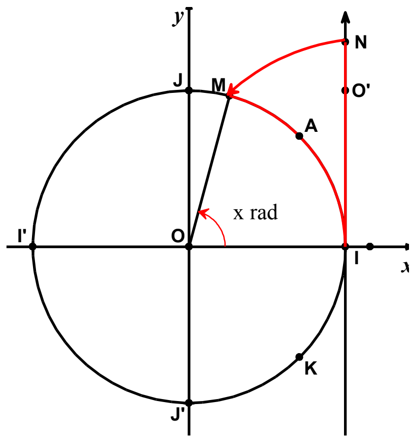
> C un cercle de centre O et de rayon 1
> Le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur ce cercle un arc de longueur 1

Remarque : sur un cercle de rayon 1 , la longueur de l'arc et la mesure en radian de l'angle au centre qui l'intercepte sont exprimés par le même nombre.

Conversion entre degrés et radians. Compléter le tableau suivant:

degrés	15		45	60		120		180
radians		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	

II) ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS UNITAIRES ET RADIAN



Soit un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
C le cercle de centre O et de rayon 1 muni du sens direct ou sens + (sens contraire des aiguille d'une montre). Ce cercle est appelé cercle trigonométrique.
Soit D la tangente à C en I muni du repère (I ;O') avec $\overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{OJ}$.
A tout réel x, on peut associer un point N d'abscisse x sur D.
On imagine que l'on enroule D comme un fil autour de C.
On obtient ainsi un point M unique sur C.

Définition:

> Le réel x est appelé mesure en radian de l'arc orienté IM d'origine I et d'extrémité M ou mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Compléter le tableau suivant:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$
M									

Donner tous les réels qui sont représentés par I , K et J.

I $\rightarrow$
J $\rightarrow$
K $\rightarrow$

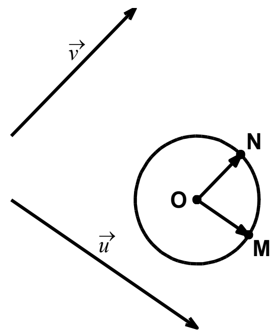
Exercice :

Soit un cercle de rayon 3. Quelle est la longueur d'un arc intercepté par un angle au centre de $\frac{\pi}{6}$ rad

Propriété :

La longueur d'un arc intercepté par un angle au centre de x rad sur un cercle de rayon r est

III) ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS NON NULS



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et les points

M, N et O tels que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$

Donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont unitaires.

Définition :

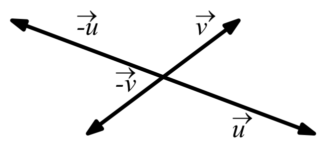
On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$

Propriété :

Un angle orienté a une infinité de mesures. Si α est une mesure, toutes les autres sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ On écrit $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

Propriété :

Un angle orienté possède une seule mesure dans $]-\pi;\pi]$.
Cette mesure s'appelle la mesure principale de cet angle.



Ex 1 et 2

Propriété :

$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

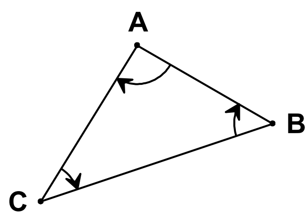
$(\vec{v},\vec{u}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$(-\vec{u},-\vec{v}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$(-\vec{u},\vec{v}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$(-\vec{v},\vec{u}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z} = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Somme des angles dans un triangle



$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Alignement de trois points soient A, B et M trois points deux à deux distincts

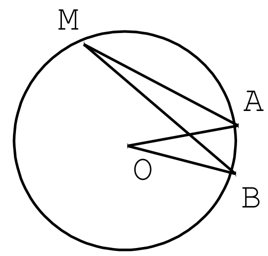
M, A et B sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$M\in[AB] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \quad + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Bissectrice

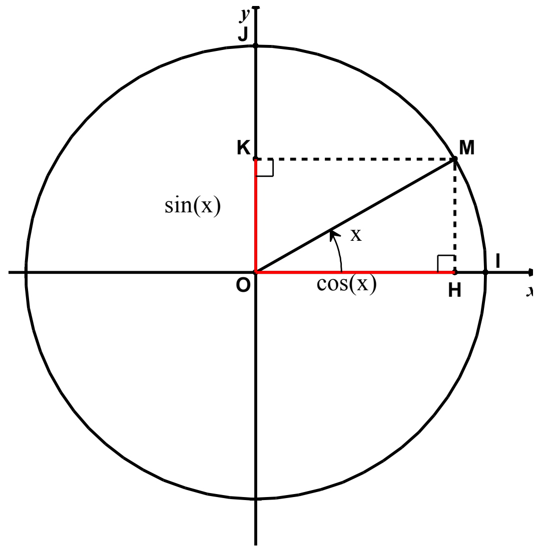
(OM) est la bissectrice de $\widehat{AOB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Angle inscrit



Soit C un cercle de centre O et A et B deux points distincts de C.
Pour tout point M de C distincts de A et B on a :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

IV) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE



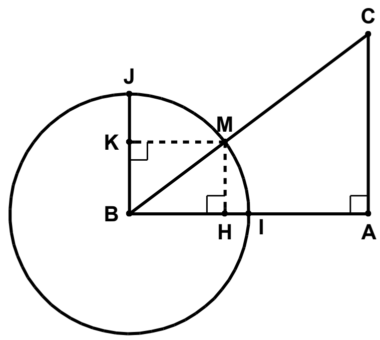
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique, et x un réel auquel on peut associer un point unique M de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$.
On appelle cos (x) l'abscisse de M et sin (x) l'ordonnée de M.

Propriétés :

Pour tout réel x : $\leqslant \cos(x) \leqslant$
$\leqslant \sin(x) \leqslant$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) =$



En utilisant le triangle rectangle ABC et le cercle de centre B de rayon 1 montrer que :

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BA}{BC}$ et $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{CA}{BC}$

En utilisant un triangle rectangle isocèle ABC et un triangle équilatéral EFG, compléter le tableau suivant :

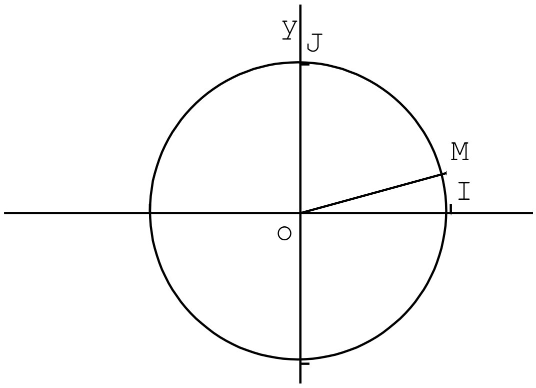
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x						
sin x						

V) ANGLES ASSOCIÉS

On donne un point M de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = x$, placer sur $\mathcal{C}$ les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 tels que

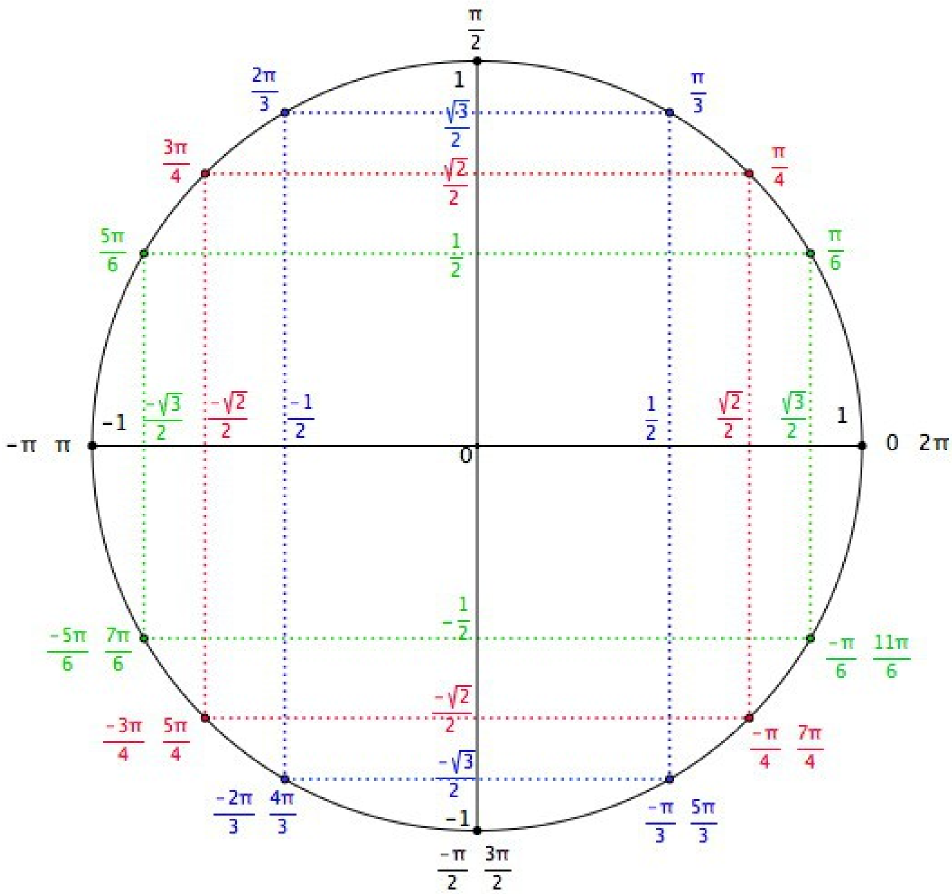
$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_1}) = x+2\pi$; $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_2}) = -x$; $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_3}) = x+\pi$; $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_4}) = \pi - x$; $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_5}) = x+\dfrac{\pi}{2}$ et

$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_6}) = \dfrac{\pi}{2} - x$



Exprimer en fonction de cos x et sin x :

$\cos(x+2\pi) =$	$\sin(x+2\pi) =$
$\cos(-x) =$	$\sin(-x) =$
$\cos(x+\pi) =$	$\sin(x+\pi) =$
$\cos(\pi-x) =$	$\sin(\pi-x) =$
$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) =$	$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) =$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) =$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) =$



VI) REPERAGE POLAIRE D'UN POINT DANS LE PLAN

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition :

Soit M ≠O, on appelle cordonnées polaires de M dans le repère (O ; $\vec{i}$) le couple de réels
(r ; θ) où r = OM et θ = $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

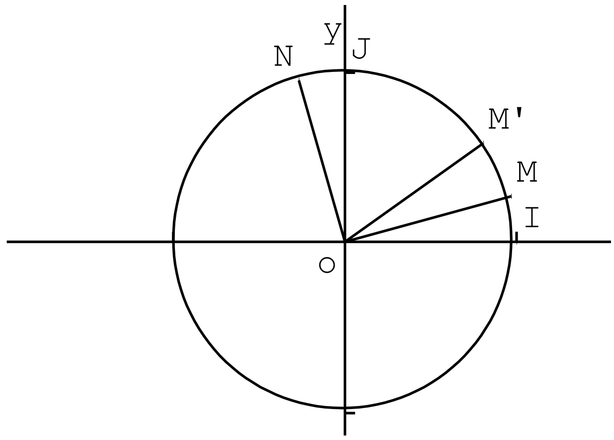
Propriété :

- Si M (r ; θ) dans le repère (O ; $\vec{i}$) alors M (;) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Si M (x ; y) repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ alors M (; θ) dans le repère (O ; $\vec{i}$) avec

cos (θ) = et sin (θ) =

EX 3



VII) LA FONCTION TANGENTE

Définition :

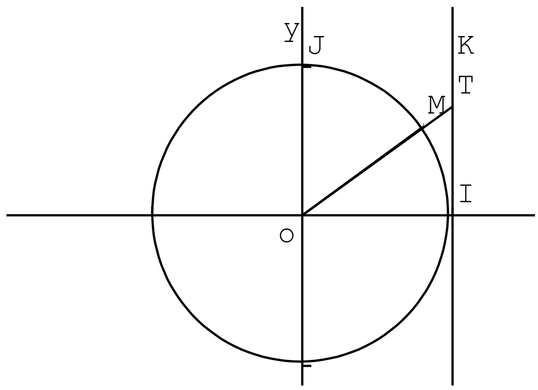
Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Rq : tan(x) est l'abscisse de T dans le repère (I ; $\overrightarrow{OK}$) avec $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ}$ où

T est l'intersection de (OM) et de la tangente à C en I.

Dans un triangle rectangle $\tan = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$.

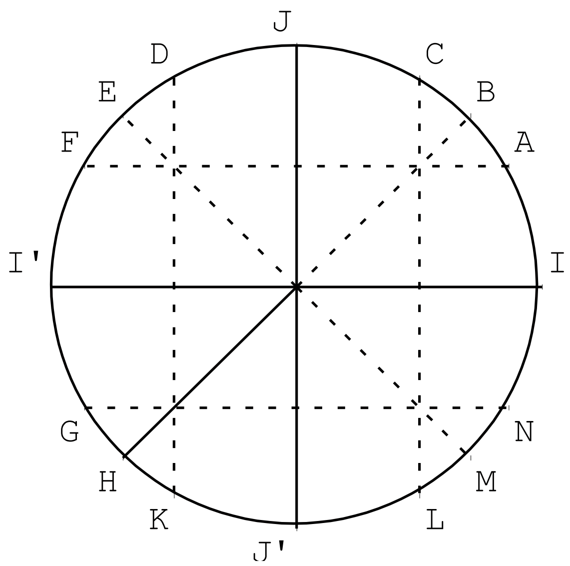


EXERCICES

EXERCICE 1 :

Déterminer les mesures principales de : 18π ; 23π ; $\frac{27\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{3}$; $\frac{427\pi}{6}$; $\frac{495\pi}{7}$

EXERCICE 2 : On donne le cercle trigonométrique, donner deux mesures (une positive et une négative) des angles qui sont représentés par les points suivants :



EXERCICE 3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) On donne les coordonnées de M (3 ; $\frac{-\pi}{3}$) dans le repère (O ; $\vec{i}$) , déterminer les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

2) On donne les coordonnées de M (6 ; $\frac{\pi}{4}$) dans le repère (O ; $\vec{i}$) , déterminer les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

3) On donne les coordonnées cartésiennes de M (- $7\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$) repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ déterminer les coordonnées polaires de M dans le repère (O ; $\vec{i}$)

4) On donne les coordonnées cartésiennes de M (5 ; $5\sqrt{3}$) repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ déterminer les coordonnées polaires de M dans le repère (O ; $\vec{i}$)

EXERCICE 4:

1) Résoudre l'équation cos(x) = $-\frac{1}{2}$ dans chacun des intervalles $[0;2\pi[$; $]-\pi;\pi]$ $[0;\pi]$.

2) Même question avec l'équation et les inéquations suivantes :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) < \frac{1}{2}$$