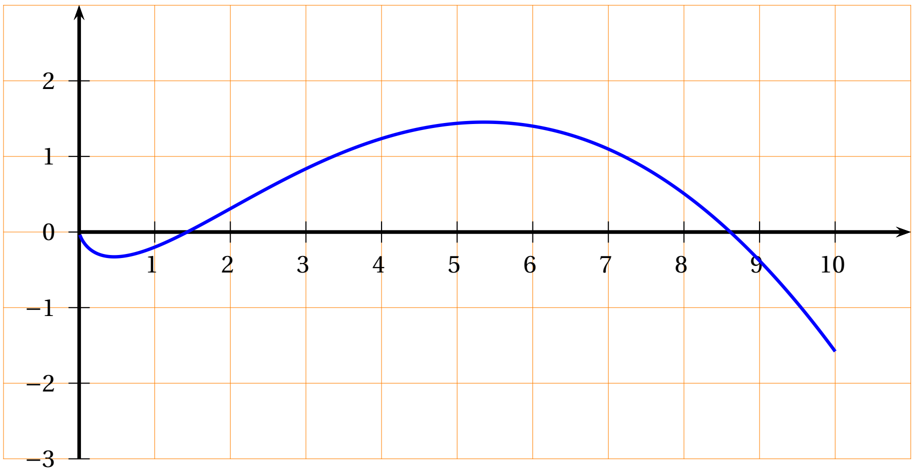
Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry
26 avril 2017

Exercice 1 Commun à tous les candidats 4 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~10]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0~;~10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 **b.** $\boxed{2}$ **c.** 3

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales sur l'intervalle $]0~;~10]$.

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul **b.** strictement positif **c.** $\boxed{\text{strictement négatif}}$

Le coefficient directeur de la tangente en $x = 7$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est négatif donc $f'(7) < 0$.

3. La fonction f' est :

a. croissante sur $]0~;~10]$ **b.** croissante sur $[4~;~7]$ **c.** $\boxed{\text{décroissante sur } [4~;~7]}$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x variant de 4 à 7 est décroissant.

4. On admet que pour tout x de l'intervalle $]0~;~10]]$ on a : $f'(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + 1$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet sur cet intervalle un point d'inflexion :

a. d'abscisse 2,1 **b.** d'abscisse 0,9 **c.** $\boxed{\text{d'abscisse 2}}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$ s'annule et change de signe pour $x = 2$.

Exercice 2 Commun à tous les candidats 5 points

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.

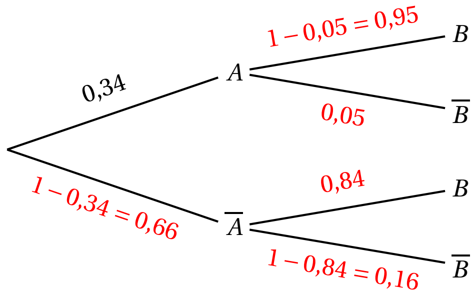
Partie A

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :
- 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

On sélectionne au hasard un coureur et on considère les évènements suivants :
- A : « le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes » ;
- B : « le coureur a moins de 60 ans ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. On complète l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2. **a.** « La personne choisie a terminé le marathon en moins de 234 minutes et est âgée de plus de 60 ans » correspond à l'événement $A\cap\overline{B}$: $P\left(A\cap\overline{B}\right)=0,34\times0,05=0,017$.

   b. D'après la formule des probabilités totales :
   $P\left(\overline{B}\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0,017+0,66\times0,16=0,1226\approx0,123$

   c. $P_{\overline{B}}(A)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{0,017}{0,123}\approx0,138$

   On peut donc considérer qu'il y a 13,8 % de coureurs qui ont terminé le marathon parmi les plus de 60 ans.

Partie B

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart type $\sigma=39$.

1. À la calculatrice, on trouve : $P(210\leqslant T\leqslant270)\approx0,543$.
2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.
   La probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes est :
   $P_{(210\leqslant T\leqslant270)}(T\leqslant240)=\dfrac{P((210\leqslant T\leqslant270)\cap(T\leqslant240))}{P(210\leqslant T\leqslant270)}=\dfrac{P(210\leqslant T\leqslant240)}{P(210\leqslant T\leqslant270)}\approx\dfrac{0,246}{0,543}\approx0,453$

3. **a.** À la calculatrice, on trouve : $P(T \leqslant 300) \approx 0{,}900$.

   b. Pour des raisons de symétrie, si la variable aléatoire T suit une loi normale de moyenne μ, alors pour tout réel a, $P(T \leqslant \mu + a) = P(T \geqslant \mu - a)$.

   Donc $0{,}9 = P(T \leqslant 300) = P(T \leqslant 250+50) = P(T \geqslant 250-50) = P(T \geqslant 200)$.

   c. On peut donc conclure que 90 % des marathoniens ont fini le marathon en plus de 200 minutes.

Exercice 3 **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, candidats L** **5 points**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 45$.

1. $u_1 = 0{,}8u_0 + 45 = 0{,}8 \times 150 + 45 = 165$; $u_2 = 0{,}8u_1 + 45 = 0{,}8 \times 165 + 45 = 177$

2. Voici deux propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables :	**Variables :**
N est un entier naturel	N est un entier naturel
U est un nombre réel	U est un nombre réel
Initialisation :	**Initialisation :**
U prend la valeur 150	U prend la valeur 150
N prend la valeur 0	N prend la valeur 0
Traitement :	**Traitement :**
Tant que $U \geqslant 220$	Tant que $U < 220$
U prend la valeur $0{,}8 \times U + 45$	U prend la valeur $0{,}8 \times U + 45$
N prend la valeur $N + 1$	N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que	Fin Tant que
Sortie :	**Sortie :**
Afficher N	Afficher N

   a. Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.

   Dans l'algorithme 1, la condition pour entrer dans la boucle est « Tant que $U \geqslant 200$ » ; la valeur de U est initialisée à 150 qui est inférieur à 220 donc on n'entre jamais dans la boucle « Tant que ».

   Le bon algorithme est le 2.

   b. On calcule les premiers termes de la suite (u_n) à la calculatrice et on trouve :

   $u_{12} \approx 219{,}8$ et $u_{13} \approx 220{,}9$ donc l'algorithme 2 affiche 13 pour valeur de n.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$; donc $u_n = v_n + 225$.

   a.
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 225 = 0{,}8u_n + 45 - 225 = 0{,}8(v_n + 225) - 180 = 0{,}8v_n + 180 - 180 = 0{,}8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 225 = 150 - 225 = -75$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = -75$.

   b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = -75$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -75 \times 0{,}8^n$.

   On a vu que $u_n = v_n + 225$ donc, pour tout n, $u_n = 225 - 75 \times 0{,}8^n$.

4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.

   On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

   - 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;

- 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

D'une année n à une année $n+1$, 20 % des participants ne reviennent pas donc 80 % reviennent et de plus, 45 nouveaux participants s'inscrivent chaque année ; on multipliera donc le nombre de participants de l'année n par 0,8 et on ajoutera 45 pour obtenir le nombre de participants de l'année $n+1$.

Le nombre de participants l'année 2015 est de 150 donc le nombre de participants peut être modélisé par la suite (u_n) précédemment définie où u_n représente le nombre de participants l'année $2015+n$.

Pour l'année $2015+n$, le nombre de participants est donc $u_n = 225-75\times 0{,}8^n$.

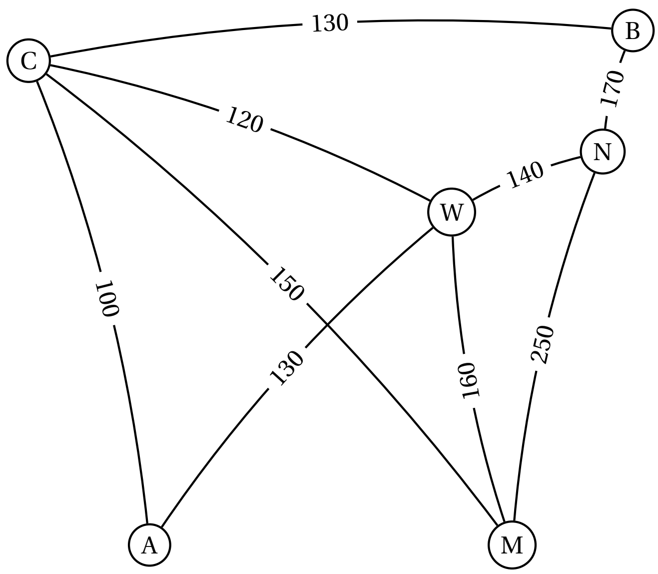
Pour tout n, $225-75\times 0{,}8^n < 225$ donc le nombre de 250 participants ne sera jamais atteint ; il n'y aura donc pas lieu de refuser des inscriptions dans les années à venir.

Exercice 3 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Alexis part en voyage dans l'Est des États-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes :

Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

1. a. Ce graphe est connexe, car on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne. Cherchons les degré de chaque sommet.

Sommet	A	B	C	M	N	W
Degré	2	2	4	3	3	4

D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degrés impairs. Ce graphe a exactement deux sommets de degrés impairs, N et M ; il existe donc un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois, en partant de N et en arrivant à M, ou le contraire.

b. Un exemple d'un tel trajet : NB – BC – CW – WN – NM – MW – WA – AC – CM.

2. Utilisons l'algorithme de Dijkstra pour relier Boston à Miami par le chemin le moins cher.

Sommets	A	B	C	M	N	W
Départ	∞	0	∞	∞	∞	∞
B(0)	∞		130−B	∞	170−B	∞
C(130)	130 + 100 230-C			130 + 150 280 - C	170 -B	130 + 120 250 - C
N(170)	230-C			280 - C		250 - C
A(230)				280 - C		250 - C
W(250)				280 - C		

Le trajet le moins cher pour aller de Boston à Miami coûte 280 € et c'est B – C – M.

3. a. La matrice d'adjacence du graphe est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Alexis veut aller de A à B en, au plus, 3 étapes ; on regarde donc successivement les coefficients de la première ligne (sommet A) et deuxième colonne (sommet B) pour les matrices P, P^2 et P^3 :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad P^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_{12} = 0$; il n'y a donc pas de vol direct entre A et B ;
- $p_{12}^{(2)} = 1$; il y a donc exactement 1 trajet en 2 vols entre A et B : A – C – B
- $p_{12}^{(3)} = 2$; il y a donc exactement 2 trajets en 3 vols entre A et B : A – W – C – B et A – W – N – B.

Il y a donc 3 trajets possibles pour relier A à B ; ce sont A – C – B, A – W – C – B et A – W – N – B.

Exercice 4 — Commun à tous les candidats — 6 points

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe . Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 7]$.

1. l'intervalle $[0; 7]$. L'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions dans $[0 ; 7]$: l'une se trouve dans l'intervalle $[0 ; 1]$; l'autre dans l'intervalle $[2 ; 3]$.
2. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7]$ est d'environ 14,8 et il semble atteint pour $x = 1$.
3. Soit I la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   La fonction f est positive sur $[0 ; 7]$ donc l'intégrale I est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ (domaine hachuré en gris sur le graphique.

   Ce domaine contient le polygone hachuré en rouge dont l'aire est de 17 donc $I > 17$.

   Ce domaine est contenu dans le polygone dessiné en noir dont l'aire est de 26 donc $I < 26$.

   Le seul intervalle qui convienne est $[18 ; 26]$.

Partie B

La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 7]$ d'expression : $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x+3}$.

1. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + 2x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x+3} = (2-2x)\,\mathrm{e}^{-x+3} = (-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x+3}$
2. **a.** Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+3} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+2$ qui s'annule et change de signe pour $x = 1$.

   $f(0) = 0$; $f(1) = 2\,\mathrm{e}^2 \approx 14,78$ et $f(7) = 14\,\mathrm{e}^{-4} \approx 0,26$

   On établit le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 7]$:

x	0		1		7
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$2\,\mathrm{e}^2$	↘	$14\,\mathrm{e}^{-4}$

   b. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7]$ est $f(1) = 2\,\mathrm{e}^2 \approx 14,78$.

3. **a.** On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	0	α		1		β		7
$f(x)$	0	10	↗	$2\,\mathrm{e}^2 \approx 14,78$	↘	10	↘	$14\,\mathrm{e}^{-4} \approx 0,26$

   D'après le tableau de variation de f, on peut déduire que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions dans $[0 ; 7]$.

b. On admet que $\alpha \approx 0{,}36$ à 10^{-2} près. On vérifie que $f(0{,}36) > 10$.

$\left.\begin{array}{l} f(2) \approx 10{,}9 > 10 \\ f(3) = 6 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [2\,;\,3]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} f(2{,}1) \approx 10{,}3 > 10 \\ f(2{,}2) \approx 9{,}8 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [2{,}1\,;\,2{,}2]$

$\left.\begin{array}{l} f(2{,}16) \approx 10{,}01 > 10 \\ f(2{,}17) \approx 9{,}95 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [2{,}16\,;\,2{,}17]$

Donc 2,16 est une valeur approchée au centième de β.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ par : $F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3}$.

a. $F(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-x+3} + (-2x-2) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x+3} = (-2+2x+2)\,\mathrm{e}^{-x+3} = 2x\,\mathrm{e}^{-x+3} = f(x)$

donc F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

b. La fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ donc la valeur de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ est $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^3 = F(3) - F(1) = (-8) - \left(-4\,\mathrm{e}^2\right) = 4\,\mathrm{e}^2 - 8$ unités d'aire.

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

a. La valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets, donc entre 1 et 3 centaines d'objets, est :

$\displaystyle\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\,\mathrm{e}^2-8}{2} = 2\,\mathrm{e}^2 - 4$ milliers d'euros, soit environ 10 778 euros.

b. L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros, ce qui revient à déterminer x pour que $f(x) > 10$.

D'après les questions précédentes, le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif doit aller de α à β centaines, donc de $\alpha \times 100$ à $\beta \times 100$, et donc de 36 à 216 objets.

ANNEXE