RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Exemple:

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P (n) : $\sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : pour n = 1 $\sum_{i=1}^{i=1} i = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc P(1) est vraie.

Hérédité : supposons P (k) vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$ donc $1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}$

or $\sum_{i=1}^{i=k+1} i = [1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k] + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ donc P(k + 1) est vraie donc la proposition P est initialisée et héréditaire donc par le théorème du raison par récurrence P (n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ on procède en deux étapes :

- Initialisation : On montre que P est vraie quand $n = n_0$.
- Hérédité : On montre que si P est vraie pour un entier $k \geqslant n_0$ alors elle est vraie pour l'entier k + 1

EX : 30 p 32 (dérivée de x^n) ex 2 - 3 p 17

ATTENTION : Ne pas oublier l'initialisation car une propriété peut être héréditaire mais fausse

Exemple P_n : $10^n + 1$ divisible par 9

Inégalité de Bernoulli

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + n a$

Dem :

SUITES RÉELLES

I) RAPPELS **faire ex 1 (fp)**

Dans tout ce chapitre I est une partie de $\mathbb{N}$ et représente l'ensemble de définition de la suite (u_n)

1) Définition :

On appelle suite réelle toute application u d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
on note $(u_n)_{n\in I}$ au lieu de $u : I \to \mathbb{R}$
$n \longmapsto u(n)$

u_n est l'image de n par la suite u.

Deux manières de définir les suites :

Suite définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$
$u_n = -3n^2 + n - 4 \quad n \in \mathbb{N}$

Suite définie par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$
$v_0 = 2$ et $v_{n+1} = -2\,v_n + 3\ \forall n \in \mathbb{N}$
Pour v , utiliser la calculatrice (2 EXE, -2ans + 3 EXE...EXE...EXE....)

Remarque : si deux suites ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence alors elles sont égales.

Représentation graphique :

Remarque : pour un suite $u_n = f(n)$ les termes sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentative de f

Construction des termes d'une suite du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Soit la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Tracer les droites d'équations y = x et y = 2 x + 3 (unités 1 cm)
Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis à l'aide des droites précédentes construire u_1 , u_2 , et u_3 sur l'axe des abscisses.

Ex 35 – 38 p 33 (récurrence)

2) Monotonie :

(u_n) est croissante sur I $\Leftrightarrow$ pour tout n de I, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
(u_n) est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ pour tout n de I, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
(u_n) est constante $\Leftrightarrow$ pour tout n de I , $u_{n+1} = u_n$.

3) Majorant et minorant :

(u_n) est majorée $\Leftrightarrow$ il existe un réel M tel que pour tout n de I, $u_n \leqslant M$.
(u_n) est minorée $\Leftrightarrow$ il existe un réel m tel que pour tout n de I, $u_n \geqslant M$.
(u_n) est bornée $\Leftrightarrow$ elle est minorée et majorée.

Ex 39 – 40 p 33 (récurrence)

II) SUITES ARITHMÉTIQUES **faire ex 2 (fp)**

Définition :

(u_n) est arithmétique $\Leftrightarrow$ pour tout n de I, $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel . r s'appelle la raison.

Propriété :

Si u est une suite arithmétique de raison r alors :

$u_n = u_k + (n - k)\, r$ $\quad$ $u_n = u_0 + n\, r$ $\quad$ $u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n = \dfrac{u_0 + u_n}{2}\,(n+1)$

Si r > 0 alors u est croissante , si r < 0 alors u est décroissante.

III) SUITES GÉOMÉTRIQUES faire ex 3 (fp)

Définition :

(u_n) est géométrique $\Leftrightarrow$ pour tout n de I, $u_{n+1} = q\, u_n$ où $q \in \mathbb{R}^*$. q s'appelle la raison

Propriété :

Si u est une suite géométrique de raison q alors :

$u_n = q^{n-k}\, u_k$ $\quad$ $u_n = q^n\, u_0$ $\quad$ $u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n = u_o\, \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$

faire Ex 4 (fp)

V) LIMITE D'UNE SUITE   On cherche la limite d'une suite quand n tend vers $+\infty$.

1) définitions

Il y a 4 possibilités :

limite finie

u converge vers L signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les u_n à partir d'un rang n_0 .

Dans ce cas on dit que la suite est **convergente** et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$

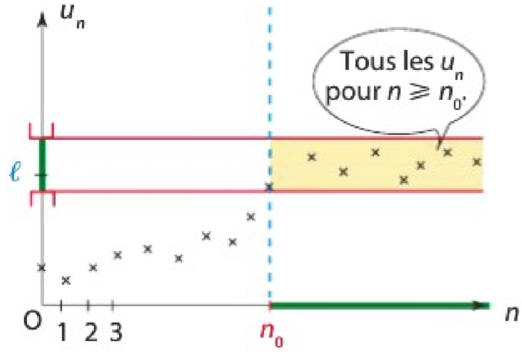
$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0 \Rightarrow u_n \in]L-\epsilon\,;L+\epsilon[$ ($|u_n - L| < \epsilon$)

Exemple : $u_n = \frac{1}{n} + 2$

$|u_n - 2| = \frac{1}{n}$ donc $\forall \epsilon > 0$ et n_0 est un entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$

donc si $n > n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ alors $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$ donc $|u_n - 2| < \epsilon$

d'où $\lim u = 2$



limite infinie

u admet pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang n_0 .
u admet pour limite $-\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les u_n à partir d'un rang n_0 .

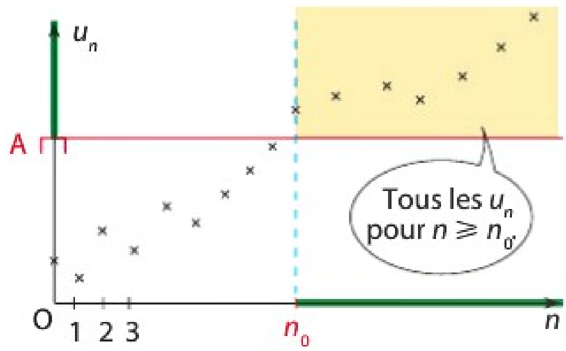
$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $u_n > A$
$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $u_n < A$

Exemple : $u_n = -2n + 7$

$\forall A$, $-2n+7 < A \Leftrightarrow n > \frac{7-A}{2}$

Soit n_0 un entier supérieur à $\frac{7-A}{2}$ alors si $n > n_0$ on a donc $u_n < A$

d'où $\lim u = -\infty$



.u n'a pas de limite : $(-1)^n$

Dans ces trois autres on dit qu'elle est **divergente**

Exercices :

2) limites de référence

propriété :

Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Démonstration pour n^2

soit $A \in \mathbb{R}$
si $A<0$ alors $\forall n$, $n^2 > A$
si $A>0$ et n_0 un entier supérieur à $\sqrt{A}$ alors si $n > n_0$ alors $n^2 > n_0^2 > A$
donc pour tout A il existe n_0 tel que si $n > n_0$ alors $u_n > A$ donc $\lim n^2 = +\infty$

Démononstration pour $\frac{1}{n}$

$\forall \epsilon > 0$ et si n_0 est un entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ alors si $n > n_0$ on a $\left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n_0} < \epsilon$ donc $\lim \frac{1}{n} = 0$

faire ex 5 (fp)

3) Opérations sur les limites

l et l ' désignent deux réels

Somme de suites :

$\lim u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (u_n + v_n)$	l + l '	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ONPC

Produit de suites :

$\lim u_n$	l	l >0 ou $+\infty$	l<0 ou $-\infty$	l >0 ou $+\infty$	l < 0 ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	l '	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (u_n . v_n)$	l+l '	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ONPC

Quotient de suites

$\lim u_n$	l	l	0	l >0 ou $+\infty$	l >0 ou $+\infty$	$+\infty$	l <0 ou $-\infty$	l <0 ou $-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim v_n$	l ' $\neq 0$	∞	0	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	l ' $\neq 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	l ' $\neq 0$	∞
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	l / l '	0	ONPC	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si l ' >0 $-\infty$ si l ' <0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si l ' >0 $+\infty$ si l ' <0	ONPC

Exemples :

Exercices :

$$\frac{3n+2}{\sqrt{n}+3}$$

4) limites et comparaison

Th :

> Soient u et v deux suites et $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$ $u_n \leq v_n$
>
> Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
>
> Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration : si lim u = $+\infty$ alors $\forall A$ il existe n_0 tel que si $n > n_0$ alors $u_n > A$
soit N le plus grand de p et n_0 donc si $n > N$ alors $v_n \geqslant u_n > A$

Th :

> Soient u, v et w trois suites, l un réel et $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$
> si u et w converge vers la même limite l alors v converge également vers l.

Exercices :

5) convergence de certaines suites

Cas particulier (suites géométriques)

Si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
Si $q > 1$ alors $\lim qn = +\infty$
Si $q \leqslant -1$ alors q^n n'a pas de limite

Démonstration pour q > 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ $(1+a)^n \geqslant 1 + n a$ (Bernoulli)

Donc si $q > 1$ donc $q = 1 + a$ avec $a > 0$ donc donc $q^n \geqslant 1 + n a$ et $\lim(1+na) = +\infty$ donc $\lim q^n = +\infty$

Exercices : $3^{5n+2} - 3^{2n+3}$

Th :

> Toute suite croissante et majorée converge .
> Toute suite décroissante et minorée converge

Th du point fixe :

> Soit la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
> Si (u_n) converge et f continue alors la limite L de (u_n) est solution de l'équation $L = f(L)$.

Démo : $\lim u_{n+1} = L$ et puisque f continue $\lim f(u_n) = f(L)$ donc $L = f(L)$

Exercices : 96 p 40 – 99 p 41 (Th pt fixe + suite auxiliaire)

Remarque : $u_{n+1} = 3 u_n^2 + 7$ si elle converge vers L alors $3L^2 - L + 7 = 0$ (pas de solution) donc ne converge pas

EXERCICES

EXERCICE 1 :

1) Soit la suite (u_n) définie par: $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n+3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Tracer les droites d'équations y = x et y = 2 x + 3 (unités 1 cm) puis placer u_0 sur l'axe des abscisses puis à l'aide des droites précédentes construire u_1 , u_2 , et u_3 sur l'axe des abscisses.

b) calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 , u_3 et u_4

2) Etudier la monotonie des suites suivantes :

$u_n=\dfrac{3-n}{5-3n}$ $n \geqslant 4$ $\qquad w_n=2n^2+n+3 \qquad v_n=3^n \qquad t_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

3) Pour les suites suivantes, à l'aide de la calculatrice, conjecturer un majorant et un minorant puis démontrer ces conjectures.

Pour $n \geqslant 1$ $\quad u_n=\dfrac{3n^2-1}{n^2} \qquad v_n=5\sin(n)-2$

EXERCICE 2 :

Dans les deux questions, (u_n) est une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$.

1) On donne u_0 = -5 et la raison 2, calculer u_{20} puis calculer $u_0 + u_1 +........+ u_{20}$.

2) On donne $u_9 + u_{11}$ = - 134 et $u_5 + u_7 + u_9$ = -139 , déterminer le premier terme et la raison.

EXERCICE 3:

Dans les deux questions, (u_n) est une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$.

a) On donne u_0 = 3 et la raison -2, calculer u_{20} et $u_0 + u_1 +........+ u_{20}$.

b) On donne u3 = 18 et u7 = 1458, déterminer le premier terme et la raison.

EXERCICE 4 :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par: $u_0=5$ et $u_{n+1}=3u_n+8$ et $v_n=u_n+4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (v_n) est géométrique.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

<u>EXERCICE 5:</u> compléter les tableaux suivants (l et l ' désignent deux réels)

Somme de suites :

$\lim u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	l '	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (u_n + v_n)$						

Produit de suites :

$\lim u_n$	l	l >0 ou $+\infty$	l<0 ou $-\infty$	l >0 ou $+\infty$	l < 0 ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	l '	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (u_n . v_n)$						

Quotient de suites

$\lim u_n$	l	l	0	l >0 ou $+\infty$	l >0 ou $+\infty$	$+\infty$	l <0 ou $-\infty$	l <0 ou $-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim v_n$	l ' $\neq 0$	∞	0	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	l ' $\neq 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	l ' $\neq 0$	∞
$\lim \frac{u_n}{v_n}$										

SUITES ET ALGORITHMES

EXERCICE 1 : Faire un programme qui affiche tous les termes de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ définie par $v_n = 0{,}85\,n + 18$ jusqu'à un n fixé par l'utilisateur du programme.

EXERCICE 2 : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 3u_n + 8$.

1) Faire un programme qui affiche tous les termes de la suite jusqu'à un n fixé par l'utilisateur.
2) Que faut-il changer dans ce programme pour que seul soit affiché le terme u_n pour le n fixé?
3) On admet que (u_n) est croissante, faire un programme qui donne le premier n tel que $u_n > a$ pour un a choisi par l'utilisateur.
   Que donne-t-il pour a = 20 000 ?
4) Soit la suite w définie pour tout n entier par $w_n = u_n + 4$.
   a) Montrer que w est géométrique.
   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 3 :

Algorithme

Entrée
Saisir n
Initialisation
u prend la valeur 200
Traitement
Pour i allant de 1 à n
u prend la valeur $0{,}9 \times u + 100$
FinPour
Sortie
Afficher u

1) Faire tourner cet algorithme pour n = 4 en remplissant le tableau suivant:

i	0				
u	200				

Il affiche :

2) Expliquer ce qu'affiche cet algorithme pour un n quelconque.

3) Programmer cet algorithme, qu'affiche-t-il pour n = 100.

Il affiche :

EXERCICE 4 :

Algorithme

Entrée
Saisir a
Initialisation
n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Traitement
Tant que $u \leqslant a$
u prend la valeur $2 \times u + 3$
n prend la valeur n+1
Fin tant que
Sortie
Afficher n

1) Faire tourner cet algorithme à la main pour a = 100 en remplissant le tableau suivant et dire ce qu'il affiche :

u	2							
n	0							

Il affiche :

2) Expliquer ce qu'affiche cet algorithme pour un a quelconque.

3) Programmer cet algorithme et le faire tourner avec les a du tableau suivant :

a	10^4	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{90}
n						

On s'aperçoit que u peut être rendu aussi grand que l'on veut pourvu que n soit assez grand : on dit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

CORRECTION

EXERCICE 1 :

Algorithme	Casio	Texas
Entrée Saisir n **Traitement** Pour i allant de 0 à n u prend la valeur $0{,}85\times i+18$ Afficher u FinPour **Sortie**	"N"? → N For 0→ I to N $0{,}85\times I+18$ → U U ◢ Next	Prompt N For(I,0,N) $0{,}85\times I+18$ → U Disp U End

EXERCICE 2 :

1)

Algorithme	Casio	Texas
Entrée Saisir n **Initialisation** u prend la valeur 5 **Traitement** Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $3\times u+18$ Afficher u FinPour **Sortie**	"N"? → N 5 → U For 1 → I to N $3\times U+8$ → U U ◢ Next	Prompt N 5→ U For(I,1,N) $3\times U+8$ → U Disp U End

Remarque : Pour n'afficher que le dernier terme, il faut mettre le " afficher u " après le "FinPour"

3)

Algorithme	Casio	Texas
Entrée Saisir a **Initialisation** n prend la valeur 0 u prend la valeur 5 **Traitement** Tant que u $\leqslant$ a u prend la valeur $3\times u+8$ n prend la valeur n+1 Fin tant que **Sortie** Afficher n	"A"? → A 0 → N 5 → U While U $\leqslant$ A 3U + 8 → U N+1 → N WhileEND N◢	Prompt A 0 → N 5 → U While U $\leqslant$ A 3U + 8 → U N+1 → N End Disp N