DS DE MATHEMATIQUES

12 – 05 – 2015 1° S Rouge

EXERCICE 1 : (5 pts)

1) Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=3^n+3^{n+2}$ est géométrique.

2) Soit (t_n) la suite arithmétique, définie sur $\mathbb{N}$, de raison 3 et de premier terme $t_0=-10$.

a) Calculer t_8 et t_{25} .

b) Calculer $t_8 + t_9 + ... + t_{25}$.

3) Soit (w_n) la suite géométrique, définie sur $\mathbb{N}^*$, de raison -3 et de premier terme $w_1=4$.

a) Calculer w_7 .

b) Calculer $w_7 + w_8 + ... + w_{18}$.

EXERCICE 2 : (3 pts)

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=4u_n+6 \quad \text{et} \quad v_n=u_n+2 .$$

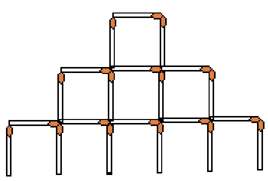
1) Calculer les 3 premiers termes de (u_n) , est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison 4 .

b) Ecrire v_n puis u_n en fonction de n .

EXERCICE 3 : (2 pts)

En posant des allumettes de même longueur sur une table, on réalise un figure plane donnée ci-contre.



1) Combien utilise-t-on d'allumettes si l'on réalise 15 rangées ?

2) Combien de rangées a-t-on construites avec 10440 allumettes ?

EXERCICE 4: (4 pts)

Soit la fonction f définie sur J = [- 4 ; 4] par $f(x)=\frac{-3x^3+15x}{x^2+3}$ et on appelle C sa courbe représentative.

1) Justifier que f est définie sur J

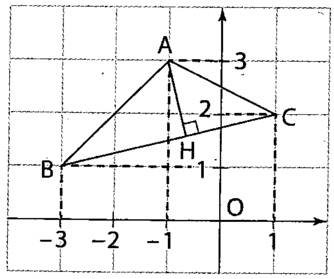
2) Montrer que pour tout x de I , $f'(x)=\frac{(1-x^2)(3x^2+45)}{(x^2+3)^2}$.

3) Dresser le tableau de variation de f .

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 .

b) Etudier la position de C par rapport à T.

EXERCICE 5 : (6 pts)



Dans un repère orthonormé, on donne les points :

A(- 1 ; 3) B (- 3 ; 1) et C (1 ; 2) et

H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis en déduire une valeur approchée en degré à 10^{-1} près de $\widehat{BAC}$.

2) **Deux méthodes pour calculer la distance AH.**

a) **1° méthode :**

α) Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$.

β) En déduire BH puis AH.

b) 2° méthode :

α) Calculer une équation de (BC).

β) Calculer une équation de (AH).

γ) En déduire les coordonnées de H puis la distance AH.

EXERCICE 1

① $v_{n+1} = 3^{n+1} + 3^{n+3} = 3(3^n + 3^{n+2}) = 3v_n$ donc (v_n) géométrique de raison $q = 3$ et de 1e terme $v_0 = 3^0 + 3^2 = 10$

② a) $t_8 = t_0 + 8 \times r = 14$ $\quad t_{25} = t_0 + 25 \times r = 65$

b) $t_8 + t_9 + \dots + t_{25} = \frac{14+65}{2} \times 18 = 711$

③ a) $w_7 = w_1 \times q^{7-1} = 2916$

b) $w_7 + \dots + w_{18} = w_7 \frac{1 - q^{12}}{1 - q} = 2916 \frac{(1 - (-3)^{12})}{1+3} = -387\,419\,760$

EXERCICE 2

① $u_0 = 2 \quad u_1 = 4u_0 + 6 = 14 \quad u_2 = 4u_1 + 6 = 62$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc pas arith. $\quad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc pas géométrique.

② a) $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 4u_n + 6 + 2 = 4u_n + 8 = 4(u_n + 2) = 4v_n$

donc (v_n) géométrique de raison 4 et 1e terme $v_0 = u_0 + 2 = 4$

b) donc $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 4^n = 4^{n+1}$

or $u_n = v_n - 2 = 4^{n+1} - 2$

EXERCICE 3

Soit u_n représentant le nombre d'allumettes de la $n^{ième}$ rangée or pour passer d'une rangée à la suivante on ajoute 2 allumettes de chaque côté alors $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 4$ donc (u_n) arithmétique de raison $r = 4$ et 1e terme $u_1 = 3$

donc $u_n = u_1 + (n-1) \times r = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$

1) $u_1 + u_2 + \dots + u_{15} = \frac{u_1 + u_{15}}{2} \times 15 = \frac{3+59}{2} \times 15 = 465$

2) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{3 + 4n - 1}{2} \times n$

donc il faut que $(4n+2)n = 2 \times 10\,440$

donc $4n^2 + 2n - 20880 \leq 0$

$\Delta = 334084 \quad n_1 = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{8} = -72{,}5$

$n_2 = \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{8} = 72$

donc on a construit 72 rangées

② $f'(x) = \dfrac{(-9x^2+15)(x^2+3) - (-3x^3+15x)2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-9x^4-27x^2+15x^2+45+6x^4-30x^2}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-3x^4-42x^2+45}{(x^2+3)^2}$

or $(1-x^2)(3x^2+45) = 3x^2+45-3x^4-45x^2 = -3x^4-42x^2+45$

donc $f'(x) = \dfrac{(1-x^2)(3x^2+45)}{(x^2+3)^2}$

③

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{132}{19}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{132}{19}$

f' est du m̄ signe que $1-x^2$ car tous les autres sont positifs.

④ a) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow T : y = 5x$

b) $f(x) - 5x = \dfrac{-3x^3+15x}{x^2+3} - 5x = \dfrac{-3x^3+15x-15x^3-15x}{x^2+3} = \dfrac{-18x^3}{x^2+3}$

$x^2+3 > 0$ donc si $x \leq 0 \Rightarrow -18x^3 \geq 0$ donc $\mathcal{C}$ au dessus de T

si $x \geq 0 \Rightarrow -18x^3 \leq 0$ donc $\mathcal{C}$ en dessous de T

EXERCICE 5

① $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC} = -4+2 = -2$ or $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-2}{\sqrt{8}\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{BAC} \simeq 108{,}4^\circ$

② a) <u>1e méthode</u>

α) $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{BA}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 8+2 = 10$

β) or $\vec{BC}\cdot\vec{BA} = BC \cdot BH \Rightarrow BH = \dfrac{10}{BC} = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$

or ABH rectangle en $H \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = 8 - \dfrac{100}{17} = \dfrac{36}{17} \Rightarrow AH = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$

b) <u>2e méthode</u>

α) $M(x;y) \in (BC) \Leftrightarrow \vec{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ coliné $\Leftrightarrow 1(x+3) - 4(y-1) = 0 \Rightarrow (BC) : x - 4y + 7 = 0$

β) $M(x;y) \in (AH) \Leftrightarrow \vec{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix} \perp \vec{BC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow 4(x+1) + 1(y-3) = 0 \Rightarrow (AH) : 4x + y + 1 = 0$

γ) pour trouver H on résoud le système $\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 & (L_1) \\ 4x + y + 1 = 0 & (L_2) \end{cases}$

$\begin{cases} 17x = -11 & L_1 + 4L_2 \to L_1 \\ -17y = -27 & 4L_1 - L_2 \to L_2 \end{cases}$ donc $H\left(-\dfrac{11}{17} ; \dfrac{27}{17}\right)$

donc $AH = \sqrt{\left(-\dfrac{11}{17}+1\right)^2 + \left(\dfrac{27}{17}-3\right)^2} = \sqrt{\dfrac{36}{17}} = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$