Baccalauréat S 2013

L'intégrale de mars à juin 2013

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

À la fin index des notions abordées

Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2013

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3. **a.** Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$ on a $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.
   Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;250]$ par
   $F(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.
   b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;100]$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
   En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -2 + t + 2t' \\ y & = & -t - 2t' \\ z & = & -1 - t + 3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -2 + t \\ y & = & -t \\ z & = & -1 - t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace M$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et N$(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t \\ y & = & 1 - 2t \\ z & = & -1 + 3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t + 2t' \\ y & = & 1 - t + t' \\ z & = & -1 - t \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t + t' \\ y & = & 1 - t - 2t' \\ z & = & 1 - t - 3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1 + 2t + t' \\ y & = & 1 - 2t + 2t' \\ z & = & -1 - t' \end{array}\right.$

2. **a.** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A$(-8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   c. La droite (D) est une droite du plan (P).
   d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. **a.** La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. **a.** Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t \\ y & = & -2 - t \\ z & = & -3 - t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\text{B}} = \text{i}$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + \text{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\text{i}z_M$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que B$M' = 2$OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. Déterminer la forme algébrique de z_M.
   b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \text{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.

a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e. Montrer que BM' = 2OI.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{n+1} &=& 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} &=& 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{array}\right.$$

On introduit les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.

2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.

Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

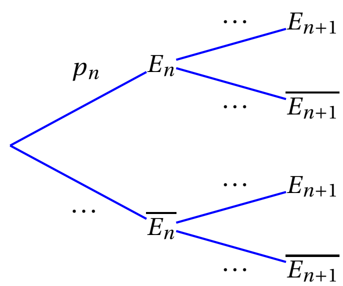
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $\text{P} < 0,05 - 10^{-\text{K}}$ P prend la valeur $0,2 \times \text{P} + 0,04$ J prend la valeur J $+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

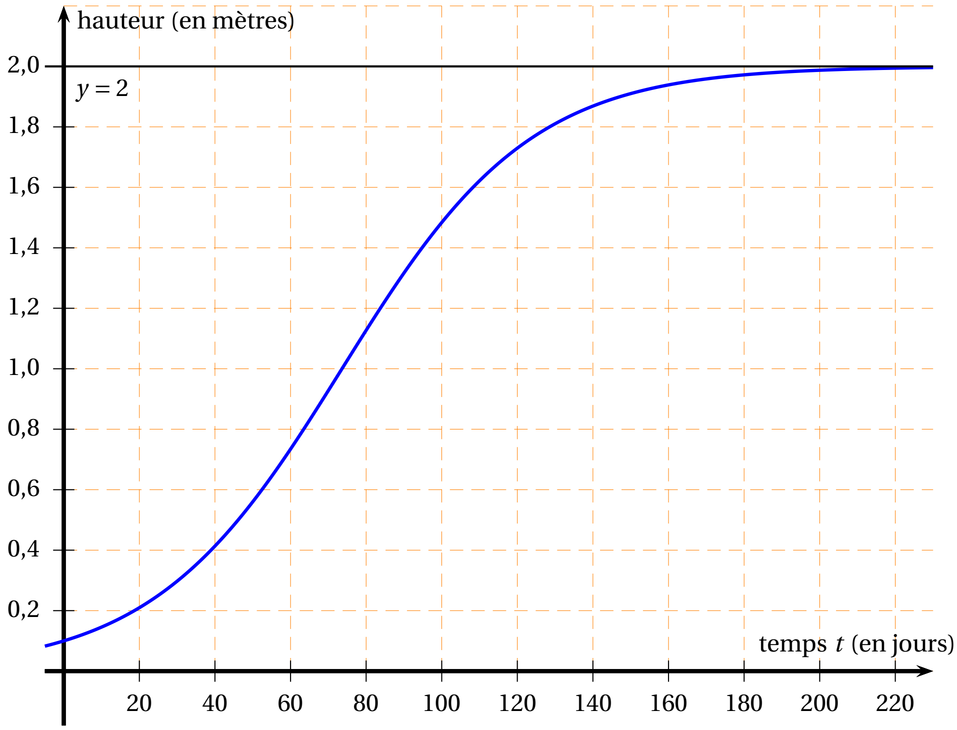
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Annexe (Exercice 1)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord 30 mai 2013

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -4t-2\\ y & = & t\\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
   b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 2 **5 points**
Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a > b$
	Affecter à c la valeur $c + 1$
	Affecter à a la valeur $a - b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.

2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m+5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p-15 \quad [26].$$

3. Décoder alors la lettre B.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.
2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

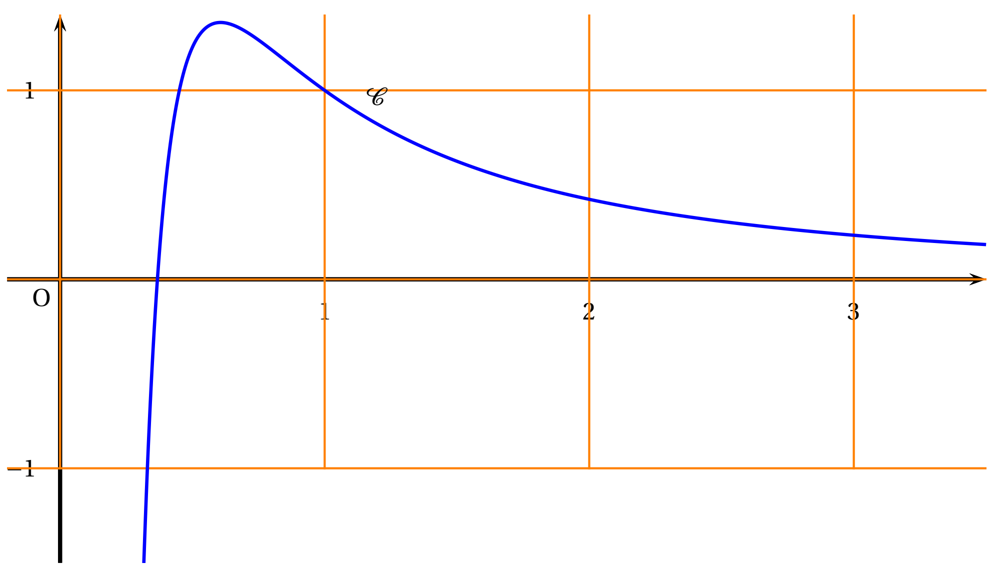
Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \text{e} - \dfrac{1}{2}$.
   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2 - \ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.

   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

∽ Baccalauréat S Liban 28 mai 2013 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'Ùte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A$(1~;~-1~;~2)$, B$(3~;~3~;~8)$, C$(-3~;~5~;~4)$ et D$(1~;~2~;~3)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t+1\\ y &=& 2t-1\\ z &=& 3t+2\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& k+1\\ y &=& k+3\\ z &=& -k+4\end{array}\right., k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :
Proposition **a.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
Proposition **b.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.
Proposition **c.** Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition **d.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :
Proposition **a.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition **b.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition **c.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition **d.** Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Question 3 :
Proposition **a.** Les points A, D et C sont alignés.
Proposition **b.** Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition **c.** Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition **d.** Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :
On note $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :
Proposition **a.** $\vec{n}\,(-1~;~5~;~4)$
Proposition **b.** $\vec{n}\,(3~;~-1~;~2)$
Proposition **c.** $\vec{n}\,(1~;~2~;~3)$
Proposition **d.** $\vec{n}\,(1~;~1~;~-1)$

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

   a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

   b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.
On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$$\left\{\begin{array}{l c l} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6 - v_n} \end{array}\right.$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 3
	b prend la valeur 8
Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur …
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix}-1 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}$.

Calculer QP.

On admet que $A = PDQ$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n,

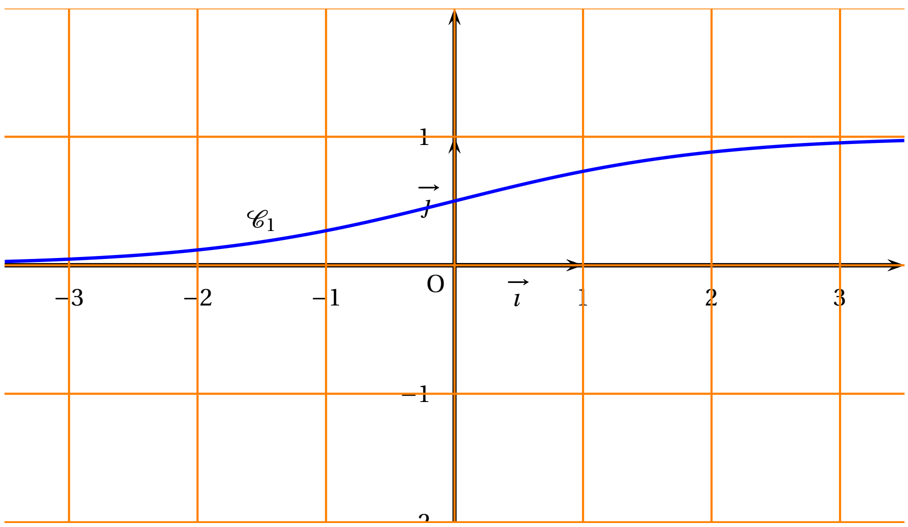
$$A^n = \begin{pmatrix}-2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1}\\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n\end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1



Baccalauréat S Polynésie
7 juin 2013

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

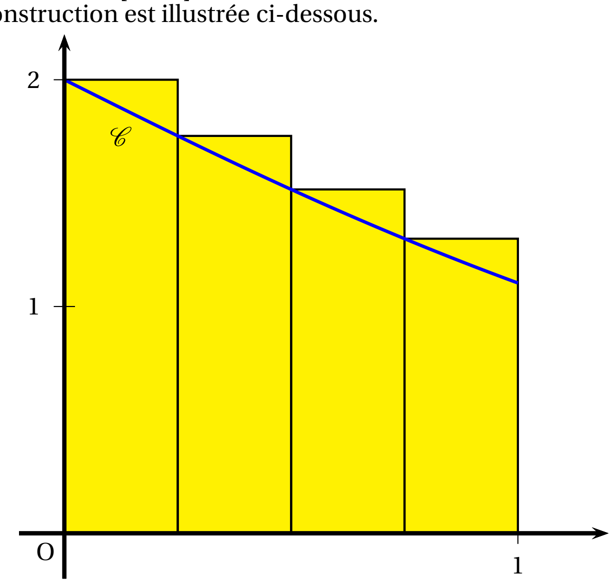
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0~;~1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}~;~\dfrac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}~;~1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 2 : **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a. une solution

b. deux solutions

c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ 5\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t \\ z = t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

d. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1 ; 2 ; 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3 ; -5 ; 1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

c. La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 : **5 points**

Commun à tous les candidats

Les 3 *parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

   a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?

   b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.

2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stocké sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leqslant X \leqslant 220)$.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

Exercice 4 : **5 points**

Candidats n'ayant pas suivis l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : **5 points**

Candidats ayant suivis l'enseignement de spécialité mathématiques

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.
Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :
pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Déterminer U_1.

   b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

   c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

   b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

ANNEXE de l'exercice 3

X est une variable aléatoire normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

b	$P(X \leqslant b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,500
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2013

EXERCICE 1 **5 points**

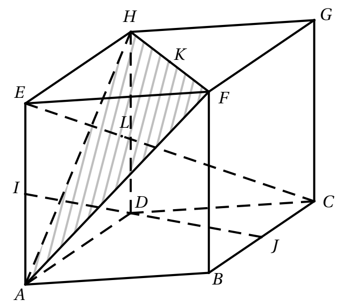
Commun à tous les candidats

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:

$ABCDEFGH$ désigne un cube de cÙté 1.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).

Le point I est le milieu du segment $[AE]$,
le point J est le milieu du segment $[BC]$,
le point K est le milieu du segment $[HF]$,
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. **a.** Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
   c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
   a. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
   b. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
   c. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
   d. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.
4. **a.** $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
5. **a.** $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   b. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   c. $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   d. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.

On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de faç on équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement « l'étudiant répond A »,

B l'évènement « l'étudiant répond B »,

C l'évènement « l'étudiant répond C »,

R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,

$\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.

En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.

ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.

On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c**.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x+1-m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. **a.** Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.
4. **a.** On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}\mathrm{e}^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suite (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0\ ;\ v_0 = 1\ ,\ \text{et}\ \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : u, v et w des nombres réels
            N et k des nombres entiers
Initialisation : u prend la valeur 0
                 v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
    w prend la valeur u
    u prend la valeur (w + v)/2
    v prend la valeur (w + 2v)/3
Fin du Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP'.
On admet que $P'BP = A$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.
En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 4 — 5 points

Commun n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \text{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels
K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
Affecter à A la valeur $\dfrac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
Affecter à B la valeur $\dfrac{B}{3}$
FinPour
Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

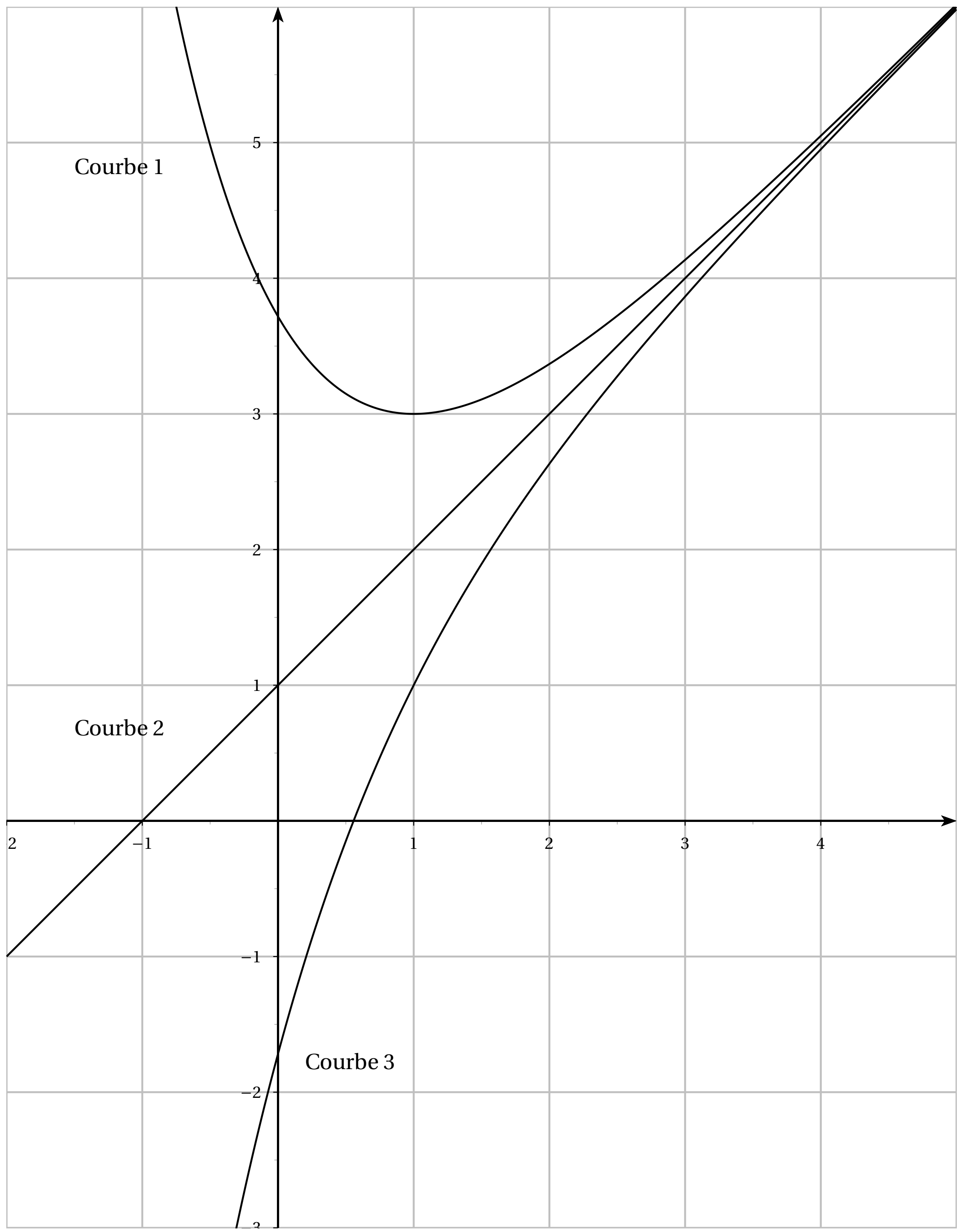
En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Annexe 2

Exercice 3

À rendre avec la copie



Annexe 2

Exercice 3

À rendre avec la copie

E12				=LOI.NORMALE($A12+E$1 ;240 ;RACINE(96) ;VRAI)						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leqslant 245{,}3)$.

∽ Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 ∾

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

— évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
— évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
— évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. **a.** Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?
   b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à $0,88$.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.
2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. **a.** Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$

1. **a.** Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. **a.** Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.

2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\text{i}, \quad b = -\sqrt{3}+\text{i}, \quad c = 1+\text{i}\sqrt{3}, \quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\text{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.

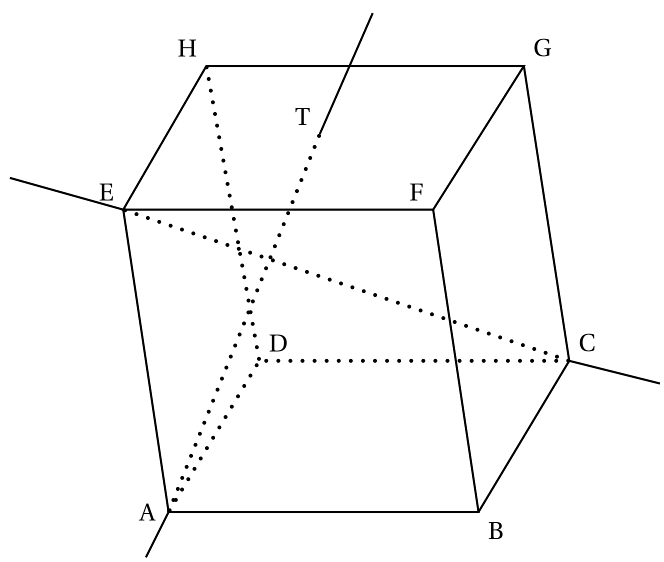
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 3 : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-t\\ y &=& 6-2t\\ z &=& -2+t\end{array}\right.$

où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $\text{E}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

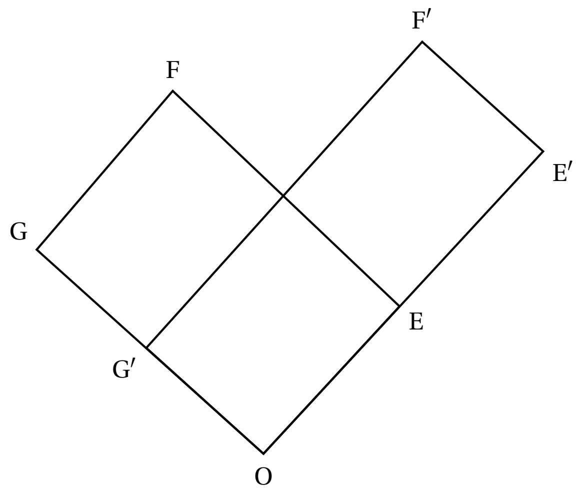


Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\,;2)$, $(-1\,;\,5)$ et $(-3\,;\,3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\,;\,y)$ du plan le point $M'(x'\,;\,y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y\\ y' &=& \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y\end{array}\right.$$

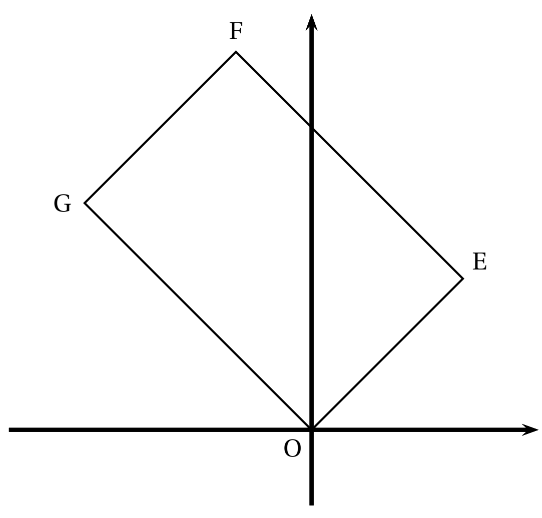


Figure 2

1. **a.** Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
Une erreur a été commise.
Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du plan par $E_0 = \text{E}$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right)$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du point E_n vérifient :

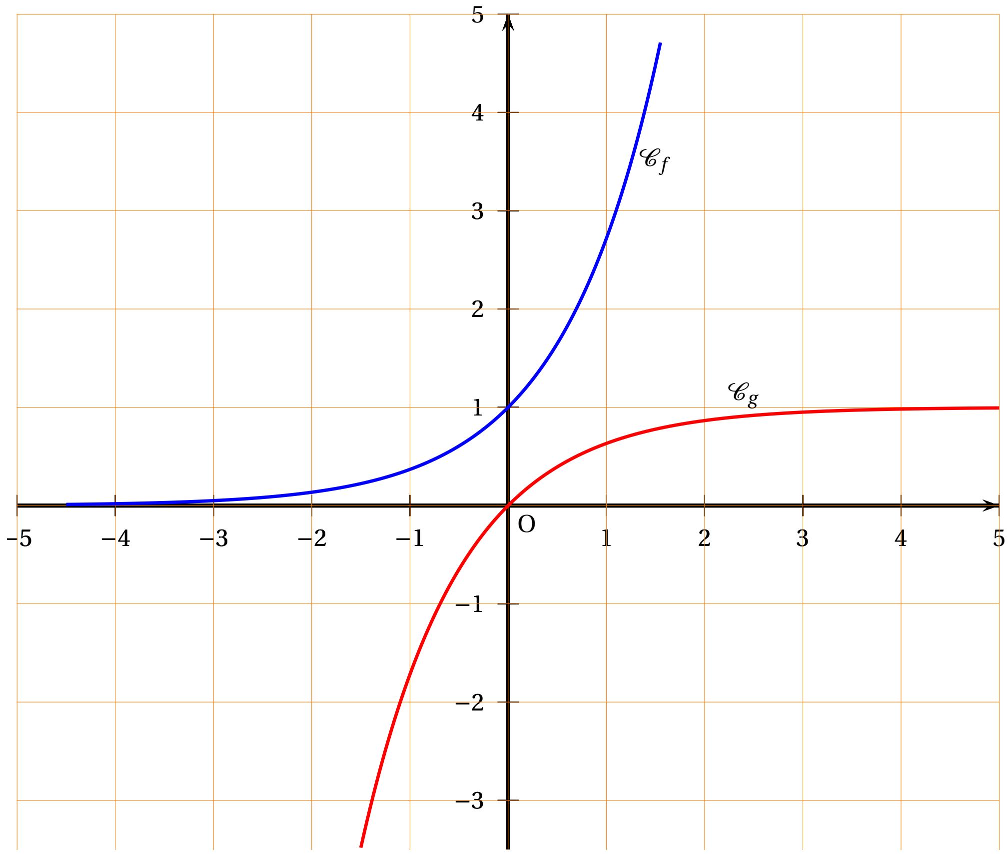
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Annexe

à rendre avec la copie

Exercice 2



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers
12 juin 2013

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.
Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

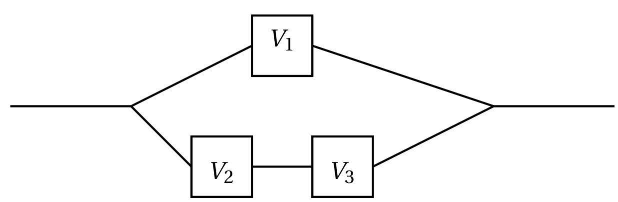
Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6 000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état d arche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.



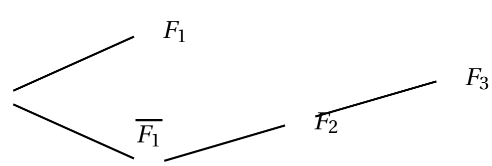
On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'évènement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_2 l'évènement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_3 l'évènement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures ».
- E : l'évènement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures ».

On admet que les évènements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0,3$.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.

   Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.
2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.



Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F,

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production, On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.

Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause. au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients, La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2. Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A (12 ; 0 ; 0), B (0 ; −15 ; 0), C (0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; −6), E (7 ; 3 ; −3) ;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x + y + 2z - 24 = 0$$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 9 - 3t \\ y & = & 0 \\ z & = & 5 + 5t \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}.$

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.
Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3 — 5 points

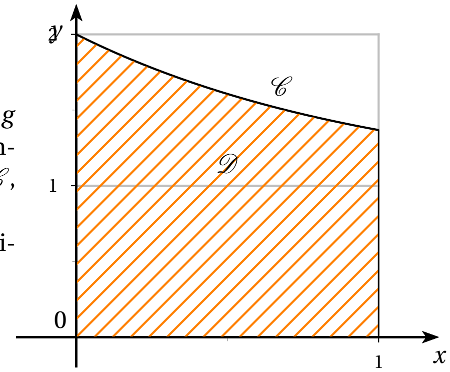
Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$, $g(x) > 0$.

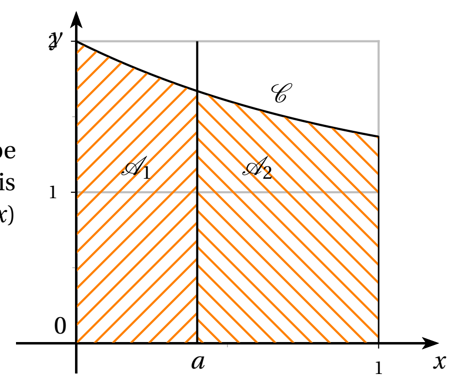
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. **a.** Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.
   b. Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0~;~1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{\text{e}}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'avant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur … Affecter à n la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Exercice 4 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.
Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

— sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;

— sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d' oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013 + n)$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux iles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que $i < n$ faire
Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$
Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$
Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.

2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur avant choisi l'année 2020.

⋆ ⋆ ⋆ Algorithme lancé ⋆ ⋆ ⋆
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
En l'année 2018. a prend la valeur 18,042 5 et b prend la valeur 11,937 5
En l'année 2019, a prend la valeur 18,031 25 et b prend la valeur 11,968 75
En l'année 2020, a prend la valeur 18,015 625 et b prend la valeur 11,984 375
⋆ ⋆ ⋆ Algorithme terminé ⋆ ⋆ ⋆

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie B - Étude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet alors que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. ¿ l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.

3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

Baccalauréat S Métropole 20 juin 2013

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

— H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
— H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
— H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
— C : « l'arbre choisi est un conifère »,
— F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

d. L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?

On arrondira à 10^{-3}.

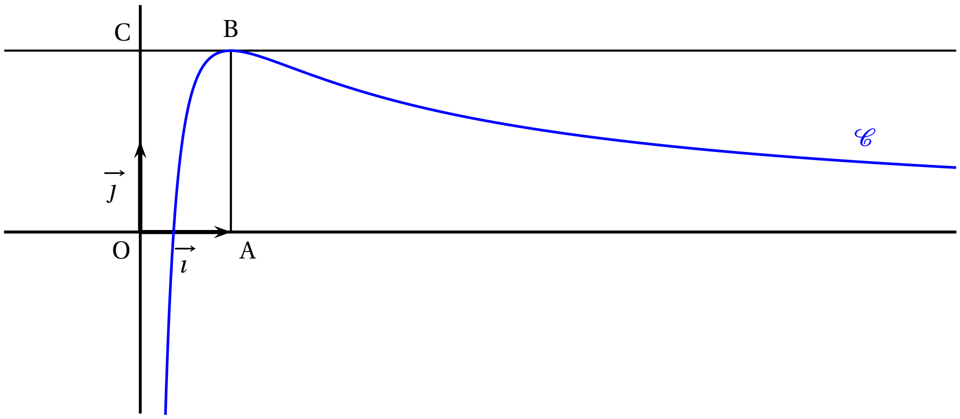
c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

On arrondira à 10^{-3}.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$;

— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

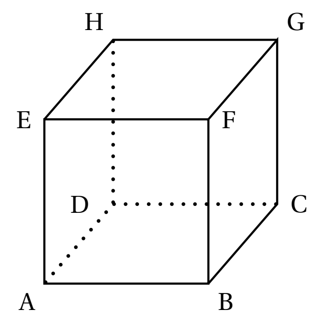
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1, -2, -2)$.
   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right., t \in \mathbf{R}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

Index