Correction du Baccalauréat ES
Liban - 28 Mai 2013

www.math93.com

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **5 points**

Commun à tous les candidats

QCM.

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :

   a. x^3-3x^2+4 **b.** $\ln(x)$ **c.** $-\mathrm{e}^x$ **d.** $\boxed{x^2+x+5}$

   Une fonction convexe à sa courbe représentative située sous tout segment d'extrémités deux points de la courbe, de plus si elle est dérivable deux fois, sa dérivée seconde est positive, c'est le cas de la fonction d) dont la dérivée seconde est égale à $2>0$.

2. Une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ définie par $f(x)=\ln(x)$ est la fonction F définie par :

   a. $F(x)=\dfrac{1}{x}$ **b.** $\boxed{F(x)=x\ln(x)-x}$ **c.** $F(x)=x\ln(x)$ **d.** $F(x)=\ln(x)$

3. La valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   a. $3,19$ **b.** e^2-1 **c.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2$ **d.** $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-1\right)}$

4. Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1\ ;\ 4)$, alors une valeur approchée au centième de $P(2\leqslant X\leqslant 3)$ est :

   a. $\boxed{0{,}15}$ **b.** 0,09 **c.** 0,34 **d.** 0,13

   On a $m=1$ et $\sigma=2$, la calculatrice donne $P(2<X<3)\approx 0{,}149\,882\,27$ donc réponse a.

5. Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.
   L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :

   a. [0,35 ; 0,75] **b.** [0,40 ; 0,70] **c.** $\boxed{[0{,}45\ ;\ 0{,}65]}$ **d.** [0,50 ; 0,60]

   En effet :
   Lorsqu'un caractère touche une proportion p inconnue de la population, on détermine la fréquence $f=55\%$ de réalisation de ce caractère sur un échantillon de taille $n=100$. Puisque $n=100\geq 30$, $nf=55\geq 5$ et $n(1-f)=45\geq 5$, L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 pour p est $I=\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   Ici $I=\left[0,55-\dfrac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0,55-\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right]=[0,45\ ;\ 0,65]$.

Exercice 2. **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$$\begin{array}{llcl}
\text{On a} & v_{n+1} & = & u_{n+1} - 12 \\
\text{Soit} & v_{n+1} & = & 0,9u_n + 1,2 - 12 \\
 & v_{n+1} & = & 0,9u_n - 10,8 \\
 & v_{n+1} & = & 0,9\left(u_n - \frac{10,8}{0,9}\right) \\
 & v_{n+1} & = & 0,9\,(u_n - 12) \\
\text{Donc} & v_{n+1} & = & 0,9v_n
\end{array}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = -2$.

b. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n$ soit $\boxed{v_n = -2 \times (0,9)^n}$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.

$$\begin{array}{llcl}
\text{On a} & u_n & = & v_n + 12 \\
 & u_n & = & -2 \times (0,9)^n + 12
\end{array}$$

Et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 12 - 2 \times 0,9^n}$

2. Les limites.

On sait que si $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, donc ici :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$;
- Puisque $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12}$.

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville, donc pour obtenir le nombre de milliers d'habitants de la ville l'année $2012 + n$, on multiplie la population de l'année précédente, par le coefficient $0,9$;
- De plus 1,2 milliers de personnes naissent ou emménagent dans cette ville, donc $u_n = 0,9u_{n-1} + 1,2$ nous donne bien le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

2. On veut que l'algorithme calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

VARIABLES
a, i, n.
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n,
a prend la valeur $\boxed{0,9 \times a + 1,2}$

SORTIE
Afficher a

3. a. Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$.

$$\begin{array}{llll} & 12-2\times 0,9^n & > & 11,5 \\ \iff & -0,9^n & > & \frac{11,5-12}{2} = -\frac{1}{4} \\ \iff & 0,9^n & < & \frac{1}{4} \\ \iff & \ln\left(0,9^n\right) & < & \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{car la fonction } x \longmapsto \ln x \text{ est croissante sur }]0;+\infty[. \\ \iff & n\ln(0,9) & < & -\ln 4 \\ \iff & n & > & -\dfrac{\ln 4}{\ln(0,9)} \approx 13,6 \quad \text{attention, on a } \ln(0,9) < 0 \end{array}$$

n étant entier, la solution de l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$ est donc constituée de tous les entiers supérieurs ou égaux à 14 soit : $\boxed{\mathscr{S} = \{\, n\,;\; n \in \mathbb{N}\,; n \geq 14\}}$.

b. En donner une interprétation.
Le nombre d'habitants de la ville de Bellecité sera supérieur à 11 500, à partir de l'année $2012 + 14 = 2026$.

Exercice 3. **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5\,;60]$ par : $C(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,1x}+20}{x}$.

1. **Calcul de C' la dérivée de la fonction C.**

   – La fonction C est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{0,1x}+20$ et $v(x) = x$.
   – C est dérivable sur $[5\,;60]$ comme composée de fonctions qui le sont,
   et sa dérivée est donnée par : $C'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
   – On a $u'(x) = 0,1\mathrm{e}^{0,1x}$ et $v'(x) = 1$ donc $C'(x) = \dfrac{0,1\mathrm{e}^{0,1x}\times x - \left(\mathrm{e}^{0,1x}+20\right)\times 1}{x^2}$
   – Et donc, pour tout $x \in [5\,;\,60]$, $\boxed{C'(x) = \dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x}-\mathrm{e}^{0,1x}-20}{x^2}}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[5\,;60]$ par $f(x) = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20$.

   a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5\,;60]$.

   – f est dérivable sur $[5\,;60]$ comme composée de fonctions qui le sont et sa dérivée est :
   $f'(x) = 0,1\left(x\times 0,1\mathrm{e}^{0,1x}+\mathrm{e}^{0,1x}\right) - 0,1\mathrm{e}^{0,1x} = 0,01x\mathrm{e}^{0,1x}$.
   – Donc de façon évidente, $f'(x)$ est du signe de x donc est positif strictement sur $[5\,;60]$.
   – **La fonction f est donc strictement croissante sur $[5\,;60]$.**

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5\,;60]$.
   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[5;\,60]$ avec $f(5) \approx -20,82 < 0$ et $f(60) \approx 1997,1 > 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède bien une unique solution α dans l'intervalle $[5\,;\,60]$.

   c. Encadrement à l'unité de α.
   On a $f(25) \approx -1,73 < 0$ et $f(26) \approx 1,54 > 0$ donc $\boxed{25 < \alpha < 26}$.

   d. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5\,;60]$.
   $f(x)$ est donc négatif sur $[5\,;\,\alpha]$ et positif sur $[\alpha\,;\,60]$.

3. **En déduire le tableau de variations de C sur $[5\,;60]$.**
   $C'(x)$ est du signe de $f(x)$ donc C est décroissante sur $[5\,;\,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;\,60]$.

x	5		α		60
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
C	$\approx 4,3297$	$\searrow$	$C(\alpha) \approx 1,286$	$\nearrow$	$\approx 7,057$

4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

   a. L'équation $C(x) = 2$ a clairement 2 solutions sur l'intervalle $[5\,;60]$.
   Une sur $[5\,;\,\alpha]$ car $C(5) > 2$ et $C(\alpha) < 2$, une autre sur $[\alpha\,;\,60]$ car $C(60) > 2$ et $C(\alpha) < 2$.

   b. L'équation $C(x) = 5$ a 1 solution sur l'intervalle $[5\,;60]$.
   Aucune sur $[5\,;\,\alpha]$ car $C(5) < 5$ et $C(\alpha) < 5$, une sur $[\alpha\,;\,60]$ car $C(60) > 5$ et $C(\alpha) < 5$.

Partie B Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5\,;60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

D'après la partie A, il faudra produire $x = 26$ (valeur arrondie de α) vélos pour minimiser le coût moyen.

Exercice 4. **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.

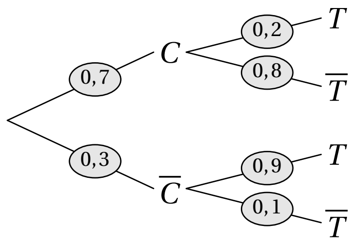
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

- C : « l'heure est creuse »
- T : « le terrain est occupé »

1. Arbre de probabilités.



2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
On a $P(T \cap C) = P(C) \times P_C(T) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ donc $\boxed{P(T \cap C) = 0,14}$.

3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
Les évènements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, la formules des probabilités totales donne alors :
$P(T) = P(T \cap C) + P(T \cap \overline{C}) = 0,14 + 0,3 \times 0,9$ donc $\boxed{P(T) = 0,41}$.

4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

$$P_T\left(\overline{C}\right) = \frac{P\left(T \cap \overline{C}\right)}{p(T)} = \frac{0,27}{0,41} \text{ donc } \boxed{P_T\left(\overline{C}\right) = \frac{27}{41}}$$

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
- 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
- 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.

X	0	6	10	Total
$P(X = x_i)$	0,59	0,14	0,27	1

6. Déterminer l'espérance de X.
On a $E(X) = 0 \times 0,59 + 6 \times 0,14 + 10 \times 0,27 = 3,54$ donc $\boxed{E(X) = 3,54}$.

7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine.
Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.
$E(X)$ correspond à la recette moyenne par heure et par terrain.
La recette hebdomadaire sera donc de $\boxed{3,54 \times 10 \times 70 = 2478 \text{ euros}}$.