Baccalauréat S Probabilités

Index des exercices de probabilité de 1999 à juin 2011

Tapuscrit : DENIS VERGÈS

N°	Lieu et date	P. conditionelle	Variable aléatoire	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Suite
1	Polynésie juin 2011	×					×
2	Métropole juin 2011	×	×	×			
3	La Réunion juin 2011	×		×			
4	Centres étrangers juin 2011	×	×			×	
5	Asie juin 2011	×		×		×	
6	Antilles–Guyane juin 2011	×		×		×	
7	Liban juin 2011	×		×			
8	Amérique du Nord mai 2011	×		×		×	
9	Pondichéry avril 2011	×	×	×			
10	Nlle-Calédonie mars 2011	×		×			
11	Amérique du Sud novembre 2010	×		×			
12	Nouvelle-Calédonie nov. 2010	×	×				
13	Polynésie septembre 2010	×	×	×			
14	Antilles–Guyane septembre 2010	×	×	×			
15	Polynésie juin 2010			×			
16	Métropole juin 2010	×	×				
17	La Réunion juin 2010	×					
18	Centres étrangers juin 2010	×				×	
19	Asie juin 2010	×					×
20	Antilles-Guyane juin 2010			×	×		
21	Amérique du Nord juin 2010	×		×			
22	Liban 3 juin 2010	×		×		×	
23	Pondichéry avril 2010			×		×	
24	Nouvelle-Calédonie nov. 2009	×	×				×
25	Amérique du Sud nov. 2009			×			
26	Polynésie septembre 2009			×		×	
27	Antilles-Guyane septembre 2009			×	×		
28	Métropole septembre 2009			×		×	
29	La Réunion juin 2009	×	×	×			
30	Métropole juin 2009		×				
31	Polynésie juin 2009		×				
32	Asie juin 2009	×		×			
33	Centres étrangers juin 2009		×				
34	Antilles-Guyane juin 2009						
35	Liban mai 2009		×	×		×	
36	Amérique du Nord mai 2009	×					
37	Pondichéry avril 2009	×	×				×
38	Nouvelle-Calédonie mars 2009						×
39	Nouvelle-Calédonie nov. 2008		×	×			
40	Polynésie septembre 2008	×	×				

N°	Lieu et date	P. condi-tionelle	Variable aléatoire	Loi bino-miale	Loi uni-forme	Loi expo-nentielle	Suite
41	Métropole La Réunion sept. 2008		×	×			×
42	Antilles-Guyane septembre 2008			×	×		
43	La Réunion juin 2008	×		×			
44	Centres étrangers juin 2008	×					
45	Asie juin 2008	×					×
46	Antilles-Guyane juin 2008			×	×		
47	Liban mai 2008	×	×	×	×		
48	Nlle-Calédonie mars 2008	×			×		
49	Nlle-Calédonie décembre 2007	×	×			×	
50	Polynésie septembre 2007			×		×	
51	Antilles-Guyane septembre 2007		×				×
52	Polynésie juin 2007	×		×			
53	Métropole juin 2007	×		×			
54	Centres étrangers juin 2007	×		×			
55	Asie juin 2007	×	×				
56	Antilles-Guyane juin 2007	×	×				×
57	Amérique du Nord juin 2007	×	×				×
58	Liban mai 2007	×					×
59	Nlle-Calédonie mars 2007	×				×	
60	Nlle-Calédonie novembre 2006	×	×	×			
61	Amérique du Sud novembre 2006	×	×				
62	Polynésie septembre 2006	×	×				
63	Métropole septembre 2006	×	×	×			
64	Polynésie juin 2006	×					×
65	La Réunion juin 2006	×		×			
66	Métropole juin 2006		×	×			
67	Centres étrangers juin 2006		×	×		×	
68	Asie juin 2006		×				×
69	Amérique du Nord juin 2006			×			
70	Liban mai 2006	×				×	
71	Pondichéry avril 2006			×			
72	Amérique du Sud novembre 2005			×		×	
73	Nlle-Calédonie novembre 2005	×	×			×	
74	Polynésie septembre 2005	×	×			×	
75	Antilles-Guyane septembre 2005					×	
76	Amérique du Nord juin 2005	×					
77	Antilles-Guyane juin 2005	×					×
78	Asie juin 2005	×	×				
79	Centres étrangers juin 2005	×		×			
80	Métropole juin 2005	×	×				
81	La Réunion juin 2005	×					
82	Liban mai 2005	×		×			
83	Nlle–Calédonie mars 2005		×				

N°	Lieu et date	P. conditionelle	Variable aléatoire	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Suite
84	Polynésie juin 2005	×		×			
85	Amérique Sud nov. 2004	×					
86	Métropole septembre 2004				×		
87	La Réunion septembre 2004	×		×			
88	Polynésie septembre 2004			×			
89	Amérique du Nord juin 2004		×				
90	Métropole juin 2004						×
91	Liban juin 2004	×		×	×		
92	Polynésie juin 2004	×				×	
93	Pondichéry juin 2004	×		×			
94	La Réunion juin 2004	×					×
95	Amérique Sud nov. 2003	×					×
96	Nlle-Calédonie nov. 2003			×			
97	Antilles-Guyane septembre 2003		×	×			
98	Métropole septembre 2003		×	×	×		
99	Amérique du Nord juin 2003					×	
100	Antilles-Guyane juin 2003	×				×	
101	Centres étrangers juin 2003		×			×	
102	La Réunion juin 2003	×	×	×			
103	Liban juin 2003			×			×
104	Polynésie juin 2003	×			×		×
105	Nlle-Calédonie mars 2003	×					
106	Amérique Sud déc. 2002	×	×				
107	Nlle-Calédonie nov. 2002		×				
108	Métropole septembre 2002	×	×				
109	Amérique du Nord juin 2002		×	×			
110	Antilles-Guyane juin 2002	×		×	×		
111	Asie juin 2002	×		×			
112	Métropole juin 2002	×					×
113	La Réunion juin 2002	×		×			
114	Polynésie juin 2002		×				
115	Pondichéry juin 2002		×				
116	Amérique Sud déc.2001		×				
117	Antilles septembre 2001				×		
118	Antilles-Guyane juin 2001		×				
119	Asie juin 2001		×				
120	Centres étrangers juin 2001		×				
121	Métropole juin 2001						×
122	Liban juin 2001	×		×			
123	Polynésie juin 2001		×	×			
124	Amérique Sud nov. 2000			×			
125	Antilles-Guyane septembre 2000					×	
126	Métropole septembre 2000	×					

Nº	Lieu et date	P. conditionelle	Variable aléatoire	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Suite
127	Polynésie septembre 2000	×					
128	Antilles-Guyane juin 2000		×				
129	Asie juin 2000		×				×
130	Centres étrangers juin 2000		×				
131	Métropole juin 2000	×		×			
132	Liban juin 2000			×			
133	Polynésie juin 2000	×					
134	Pondichéry juin 2000	×					
135	Amérique Sud nov. 1999	×					
136	Antilles-Guyane septembre 1999						
137	Métropole septembre 1999			×			
138	Sportifs ht-niveau sept. 1999	×					

1 Polynésie juin 2011

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
   $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

2 Métropole juin 2011

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

3 La Réunion juin 2011

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'internet un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2 000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale.
On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement internet.
- 1 740 élèves utilisent régulièrement internet.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée.
On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde »
- E l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première »
- T l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale »
- I l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet »

1. Compléter le tableau d'effectifs donné en annexe.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement internet.
3. Calculer la probabilité de I sachant T, notée $P_T(I)$, et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
4. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas internet.
5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet.

   Montrer que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\dfrac{21}{58}$.
6. On choisit au hasard, successivement et avec remise, trois questionnaires.

   Quelle est la probabilité que, parmi les trois questionnaires, un exactement soit celui d'un élève utilisateur régulier d'internet ?

   On en donnera la valeur arrondie au millième.

4 Centres étrangers juin 2011

Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 4
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel t strictement positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ s'exprime par $P(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Affirmation
Sachant que $X \geqslant 2$, la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2\,;\,3]$ est égale à $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Question 5
Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Affirmation
La plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,999 9, est égale à 13.

5 Asie juin 2011

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\ ;\ t]) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

b. $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

c. $p([a\ ;\ b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :

$$p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)},$$

et que $p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $\mathrm{e}^{-0,4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

6 Antilles–Guyane juin 2011

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

a) 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

a) 0,271 **b)** 0,135 **c)** 0,865 **d)** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a) $\dfrac{125}{3\,888}$ **b)** $\dfrac{625}{648}$ **c)** $\dfrac{25}{7\,776}$ **d)** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

a) 0,5 **b)** 0,35 **c)** 0,46 **d)** 0,7

7 Liban mai 2011

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué $0,5$ *point si la réponse est exacte,* 0 *sinon.*

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\dfrac{3}{5}$ **Réponse B :** $\dfrac{4}{5}$ **Réponse C :** $\dfrac{3}{50}$ **Réponse D :** $\dfrac{6}{25}$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\dfrac{21}{50}$ **Réponse B :** $\dfrac{33}{50}$ **Réponse C :** $\dfrac{3}{5}$ **Réponse D :** $\dfrac{12}{25}$

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\dfrac{4}{11}$ **Réponse B :** $\dfrac{6}{25}$ **Réponse C :** $\dfrac{7}{11}$ **Réponse D :** $\dfrac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\dfrac{11}{81}$ **Réponse B :** $\dfrac{2}{7}$ **Réponse C :** $\dfrac{5}{84}$ **Réponse D :** $\dfrac{4}{63}$

b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\dfrac{2}{7}$ **Réponse B :** $\dfrac{1}{7}$ **Réponse C :** $\dfrac{1}{21}$ **Réponse D :** $\dfrac{79}{84}$

c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.

Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76 **Réponse B :** 71 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

8 Amérique du Nord 27 mai 2011

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

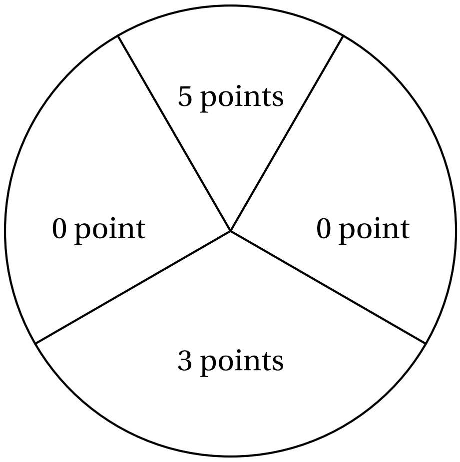
Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
   Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.
   a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
      Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

9 Pondichéry avril 2011

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

  a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.
  On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$

  b. En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

  a. Donner la loi de probabilité de X.

  b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

10 Nouvelle-Calédonie mars 2011

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas el il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

11 Amérique du Sud novembre 2010

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.

2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

a. Déterminer $P(S \cap A)$.

b. Montrer que $p(S) = \frac{17}{60}$.

c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :
$d^2 = \sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1\,000d^2$.

b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

12 Nouvelle-Calédonie novembre 2010

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

   a. Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

   B : « seule la première boule tirée est verte »,

   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

13 Polynésie septembre 2010

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement N.

b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.

S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.

S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0,999$.

14 Antilles septembre 2010

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   - **a.** Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   - **b.** Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   - **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   - **b.** Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   - **a.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   - **b.** Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

15 Polynésie juin 2010

Retour au tableau

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\dfrac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».

   Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.
Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'évènement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

16 Métropole 22 juin 2010

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\dfrac{21}{40}$
- $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$

2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

- $\dfrac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
- $\binom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3$
- $\binom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.
Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

- $\dfrac{7}{60}$
- $\dfrac{14}{23}$
- $\dfrac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'évènement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à :

- $\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-3\lambda}$
- $\mathrm{e}^{-3\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}$

17 La Réunion 22 juin 2010

Retour au tableau

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\dfrac{7}{18}$.

3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;
- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\dfrac{4}{9}$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

18 Centres étrangers 14 juin 2010

Retour au tableau

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,3$.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Affirmation :

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0,4,\ p_A(B) = 0,7 \text{ et } p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,1.$$

Affirmation :

La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

19 Asie 21 juin 2010

Retour au tableau

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

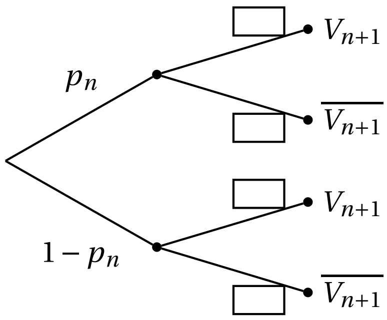
On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

   a. A : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs » ;

   b. B : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e^ sondage soit positif.
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

   a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

   b. Exprimer p_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

20 Antilles-Guyane 18 juin 2010

Retour au tableau

*Pour chacune des questions suivantes, **une ou deux des réponses** proposées sont correctes.*
Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.
Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.
Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\dfrac{5}{8}$ **B :** $\dfrac{21}{32}$ **C :** $\dfrac{11}{32}$ **D :** $\dfrac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\dfrac{105}{248}$ **B :** $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\dfrac{21^2}{32^2}$ **D :** $\dfrac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A : $\dfrac{1}{3}$ **B :** $\dfrac{1}{5}$ **C :** $\dfrac{1}{12}$ **D :** $\dfrac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A : 0,35 à 10^{-2} près **B :** $0,85^9$ **C :** $0,85^9 \times 0,15$ **D :** $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

21 Amérique du Nord 3 juin 2010

Retour au tableau

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

   a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

   b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à $0,99$.

22 Liban 3 juin 2010

Retour au tableau

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.

On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »

3. Soit le nombre complexe $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

23 Pondichéry avril 2010

Retour au tableau

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que : $P(X = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.

3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

24 Nouvelle-Calédonie novembre 2009

Retour au tableau

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

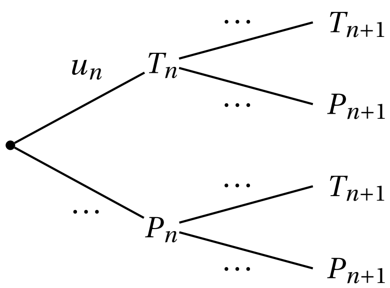
$$u_n = p\left(T_n\right)$$

où $p\left(T_n\right)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. **a.** Donner les valeurs des probabilités $p\left(T_1\right)$, $p\left(P_1\right)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}\left(T_2\right)$, $p_{P_1}\left(T_2\right)$.

b. Montrer que $p\left(T_2\right) = \dfrac{1}{4}$.

c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

25 Amérique du Sud novembre 2009

Retour au tableau

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. **a.** Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome ». (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

26 Polynésie septembre 2009

Retour au tableau

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.
Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse. ***Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE.***

Pour chaque question, il est compté 1 *point si les deux réponses sont exactes,* 0,5 *point pour une réponse exacte et une absence de réponse et* 0 *point sinon.*

Question A Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».	Proposition 1 La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.	Proposition 2 La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.
Question B Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que : • A et B sont indépendants ; • $P(\text{A}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{A} \cup \text{B}) = \frac{3}{4}$; • $P(\text{C}) = \frac{1}{2}$; $P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{1}{10}$.	Proposition 3 $P(\text{B}) = \frac{7}{12}$	Proposition 4 $P\left(\overline{\text{A} \cup \text{C}}\right) = \frac{2}{5}$. $\overline{\text{A} \cup \text{C}}$ désigne l'évènement contraire de $\text{A} \cup \text{C}$.
Question C Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;1[$.	Proposition 5 Si $P(X = 1) = 8P(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.	Proposition 6 Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = P(X = 0)$.
Question D La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0\,;+\infty[$. On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ est donnée par : $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ (avec $\lambda = 0,07$).	Proposition 7 La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.	Proposition 8 Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

27 Antilles-Guyane septembre 2009

Retour au tableau

VRAI OU FAUX
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
PARTIE B

1. Si A et B sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.
2. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$, alors $P\,(X \in [0,1\,;\,0,6]) = 0,6$.
3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

28 Métropole septembre 2009

Retour au tableau

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus. Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$

a. Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\dfrac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

29 La Réunion juin 2009

Retour au tableau

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

On note A l' évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

- **a.** Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
- **b.** Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».
- **c.** Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».
- **d.** Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

- **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
- **c.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

  Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

30 Métropole 23 juin 2009

Retour au tableau

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. **a.** On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

31 Polynésie 23 juin 2009

Retour au tableau

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. **a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

32 Asie juin 2009

Retour au tableau

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}$.

d. En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}$.

e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, succesifs avec remise.

a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à $0,983$.

33 Centres étrangers juin 2009

Retour au tableau

1. Restitution organisée de connaissances :

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. Application : Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :

- R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

II a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

34 Antilles-Guyane juin 2009

Retour au tableau

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A, B, C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

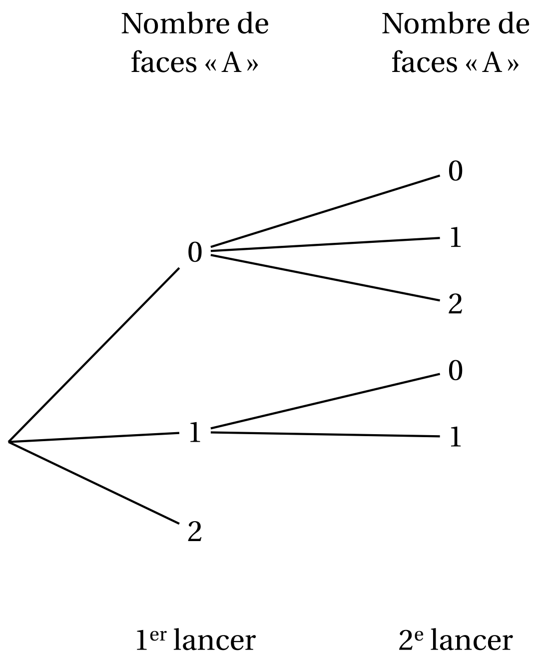
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

- E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,
- E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,
- E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante :

- Le joueur lance les deux dés simultanément.
- Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.
- Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.
- Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\dfrac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.
Le jeu est-il favorable au joueur ?

35 Liban mai 2009

Retour au tableau

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$.
La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\dfrac{2}{5}$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $\dfrac{3}{5}$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.
On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

a. 0,91 **b.** 0,18 **c.** 0,19 **d.** 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.
S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.
Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{27}{40}$ **c.** $\dfrac{3}{4}$ **d.** $\dfrac{27}{28}$

36 Amérique du Nord mai 2009

Retour au tableau

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0\,;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.

   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions
   $\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0,01 \\ y' & = & 0,05y(10-y) \end{array}\right.$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions
   $\left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0,5z + 0,05 \end{array}\right.$

2. **a.** En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

   b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à $0,08$.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

37 Pondichéry avril 2009

Retour au tableau

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

   b. Quelle est son espérance ?

   c. Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

   (On pourra construire un arbre de probabilité).

   b. En déduire que : $p(A) = \dfrac{7}{48}$.

   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

   b. Calculer la limite de la suite $\left(p_n\right)$. Commenter ce résultat.

38 Nouvelle-Calédonie mars 2009

Retour au tableau

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.
Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 : a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$,

puis : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

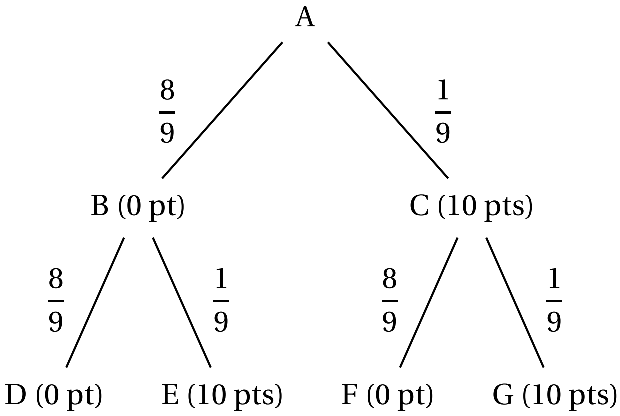
c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

39 Nouvelle-Calédonie novembre 2008

Retour au tableau

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.
Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

  a. Déterminer la loi de probabilité de X.

  b. Calculer l'espérance de X.

  c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

  a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième

  b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

40 Polynésie septembre 2008

Retour au tableau

On rappelle que la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- B_1 l'évènement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'évènement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- A l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \dfrac{3}{4}$.

b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

c. Montrer que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'évènement A.

a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 1.

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \dfrac{1}{4}$.

41 Métropole et La Réunion sept. 2008

Retour au tableau

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\text{E}) = 0,02$ et $p(\text{F}) = 0,17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1-(0,9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

42 Antilles–Guyane sept. 2008

Retour au tableau

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'ume U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.
On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »
V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.
2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?
3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.
   On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.
4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.
   On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.
   Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.

43 La Réunion juin 2008

Retour au tableau

Tous les résultats seront arrondis à10^{-2}près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question **1. b.**. Quel commentaire peut-on faire ?

44 Centres étrangers juin 2008

Retour au tableau

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel dc cette entreprise.
On note :

- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

   a. un agent de maintenance ;

   b. une femme agent de maintenance ;

   c. une femme,

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

On note :

- A l'évènement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

45 Asie juin 2008

Retour au tableau

On considère plusieurs sacs de billes $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_n, \ldots$ tels que :

- le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants, $\mathrm{S}_2,\ \mathrm{S}_3, \ldots, \mathrm{S}_n, \ldots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{array}\right.$

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0{,}499\,99 \leqslant p(E_n) \leqslant 0,5$?

46 Antilles-Guyane juin 2008

Retour au tableau

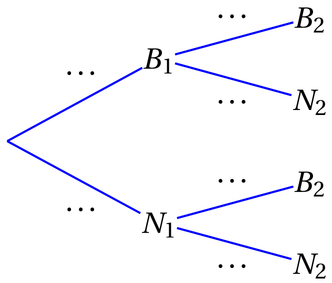
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. **a.** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.

Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.

Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.

Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

47 Liban mai 2008

Retour au tableau

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ».
   Montrer que $p(\text{R}) = 0,15$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\text{E(G)} \geqslant 0$?

48 Nouvelle-Calédonie mars 2008

Retour au tableau

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

   a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.

   b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

   c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.

   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

49 Nouvelle-Calédonie décembre 2007

Retour au tableau

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

- D l'évènement « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'évènement « le composanrt provient du premier fournisseur » ;
- F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. **a.** Dessiner un arbre pondéré.

b. Calculer $p(D \cap T_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}022\,5$.

c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a. Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ. Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

50 Polynésie septembre décembre 2007

Retour au tableau

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

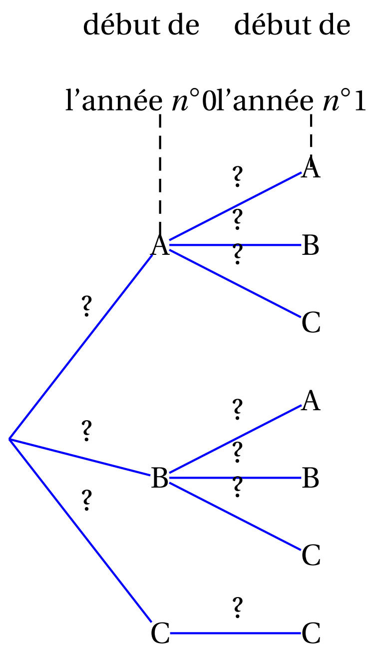
- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. **a.** Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\left\{\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

   a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.

   b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

   c. En déduire les limites des suites $\left(p_n\right)$, $\left(q_n\right)$ et (r_n). Interpréter le résultat.

51 Antilles-Guyane septembre 2007

Retour au tableau

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note $n,\ b$ et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n,\ b,\ r)$ la probabilité en fonction de $n,\ b$ et r de l'évènement G. Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.

2. Le but de cette question est de déterminer $n,\ b$ et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale. L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ orthonormal. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;0\,;0)$, $(0\,;15\,;0)$ et $(0\,;0\,;15)$ et soit M le point dc coordonnées $(n,\ b,\ r)$. On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.

a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}\left(\text{O}M^2-15\right)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

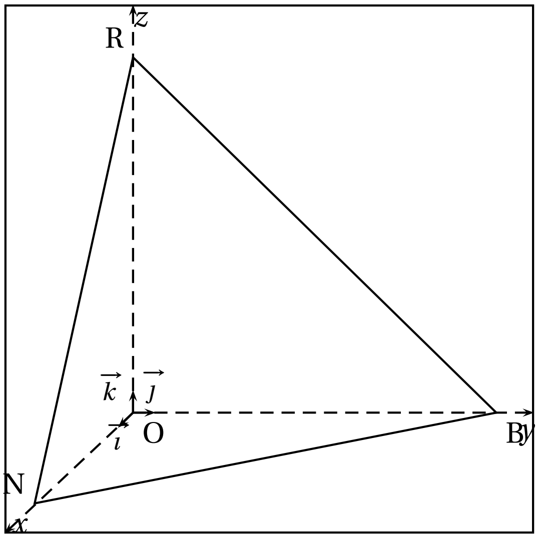
e. En déduire tes valeurs de $n,\ b$ et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\dfrac{2}{7}$.
Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $\text{E}(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.


z
R
$\vec{k}$
$\vec{j}$
$\vec{i}$
O
B
y
N
x

52 Polynésie juin 2007

Retour au tableau

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\text{E}(X)$.
   b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\text{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

53 Métropole juin 2007

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon. Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

   a. 0,4 b. 0,04 c. 0,1024 d. 0,2048

2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

   a. 0,043 b. 0,275 c. 0,217 d. 0,033

3. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

   a. 0,100 b. 0,091 c. 0,111 d. 0,25

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

   a. $\dfrac{5}{9}$ b. $\dfrac{9}{14}$ c. $\dfrac{4}{7}$ d. $\dfrac{1}{3}$

54 Centres étrangers juin 2007

Retour au tableau

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte $0,5$ *point . (Une réponse inexacte enlève* $0,25$ *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à* 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A $\dfrac{1}{56}$ B $\dfrac{1}{120}$ C $\dfrac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A. $\dfrac{11}{56}$ B. $\dfrac{11}{120}$ C. $\dfrac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a. La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

b. La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A. $\left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \dfrac{5}{8} + 3 \times \dfrac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

– R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
– N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
– R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
– N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{4}{7}$ C. $\dfrac{5}{14}$

b. La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A. $\dfrac{16}{49}$ B. $\dfrac{15}{64}$ C. $\dfrac{15}{56}$

c. La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{5}{7}$ C. $\dfrac{3}{28}$

d. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A. $\dfrac{15}{56}$ B. $\dfrac{3}{8}$ C. $\dfrac{5}{7}$

55 Asie juin 2007

Retour au tableau

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que $p_{\overline{\text{F}}}\left(\overline{\text{S}}\right) = \dfrac{1}{4}$.

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

a. Démontrer que $p(\text{S}) = 0,934$.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B. Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

56 Antilles-Guyane juin 2007

Retour au tableau

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte aux questions 1 *et* 2 *rapporte 0,5 point et à la question* 3 *rapporte* 1 *point.*
Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.[2ex]*
On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P1 et P2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.
Une seule pièce de type P1 et une seule pièce de type P2 sont nécessaires par boîte.
L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S1 et S2.
Le sous-traitant S1 produit 80 % des pièces de type P1 et 40 % de pièces de type P2.
Le sous-traitant S2 produit 20 % des pièces de type P1 et 60 % de pièces de type P2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P1 et P2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type. Il tire une pièce au hasard.

a. La probabilité que ce soit une pièce P1 est

0,8 0,5 0,2 0,4 0,6

b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5

c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est

0,2 0,4 0,5 0,6 0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

0,1588 0,2487 0,1683 0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 et P2 est :

0,5000 0,2513 0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\dfrac{357}{995}$ $\dfrac{103}{199}$ $\dfrac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P1 et P2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P1	P2
S1	0,2	0,25
S2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors
$p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P1 fabriquée par S1 dure moins de 5 ans est :

0,367 9   0,632 1

57 Amérique du Nord juin 2007

Retour au tableau

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle : E_1 l'évènement « le joueur perd la première partie » ;
E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;
E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

  a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

  b. Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'évènement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

  c. Déterminer la loi de probabilité de X.

  d. Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

  a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .

  b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

  a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

  b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

  c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

58 Liban mai 2007

Retour au tableau

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.

2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer p_3.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.

b. Démontrer que la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente vers un réel noté ℓ.

d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

59 Nouvelle-Calédonie mars 2007

Retour au tableau

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 *point.*
Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ **b.** $\dfrac{9}{8}$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ **d.** $\dfrac{4\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 **b.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ **c.** $\dfrac{23}{128}$ **d.** $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ lorsque

a. $m = -1$ **b.** $m = \dfrac{1}{2}$ **c.** $m = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ **d.** $m = \mathrm{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

a. $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **b.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{1}{5\mathrm{e}}$ **d.** $\dfrac{1}{0,2}(\mathrm{e}-1)$

60 Nouvelle-Calédonie novembre 2006

Retour au tableau

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. **a.** On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

   b. On désigne par A l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».

   On désigne par B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».

   Calculer les probabilités de A et de B
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$.

   On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

61 Amérique du Sud novembre 2006

Retour au tableau

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_{\text{B}}\left(J_n\right) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}.$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

62 Polynésie septembre 2006

Retour au tableau

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Calculer $P(X = 0)$.

c. On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

– Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$.

– En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. Soit k un entier compris entre 1 et n. Soit N l'évènement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ». Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ». Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages ». Calculer $P(\text{A})$, $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P(\text{N})$.

63 Métropole septembre 2006

Retour au tableau

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise.
Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions.
Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\text{E}_1)$; $p_{\text{E}_1}(\text{O}_2)$; $p(\text{E}_1 \cap \text{E}_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   c. **Application numérique :** Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

64 Polynésie juin 2006

Retour au tableau

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 2e mois \ Retards le 1er mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1 000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :

- si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
- si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n », B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ». Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a. Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

65 La Réunion juin 2006

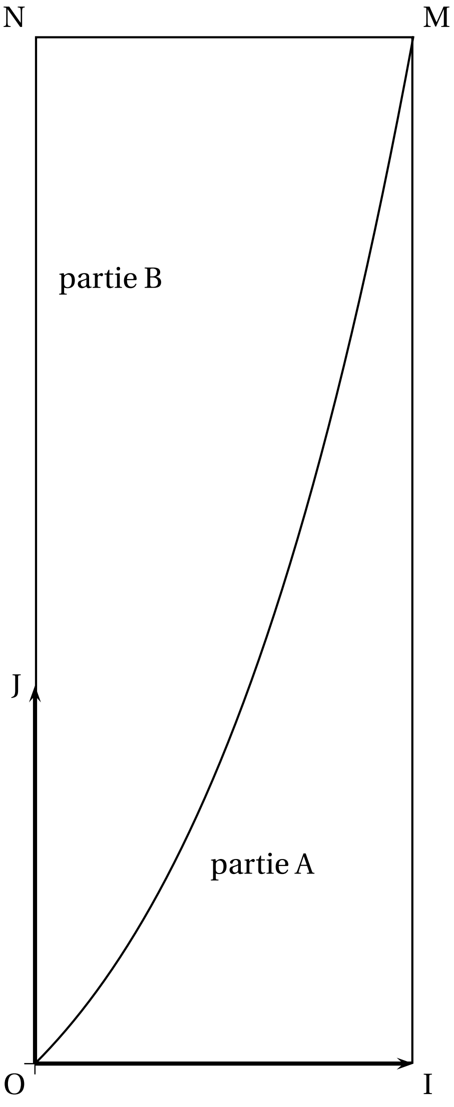
Retour au tableau

Première partie

Calculer l'intégrale $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OI}},\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
Cette courbe partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.
Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B.
On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2\mathrm{e}}$. Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?
2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.
   a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte). Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

66 Métropole juin 2006

Retour au tableau

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité $0,2$ de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b. On pose $d^2 = \Sigma_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé 7

67 Centres étrangers juin 2006

Retour au tableau

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée. Pour $k \in \{1~;~2~;~3~;~4)$, on note p_i la probabilité d'obtenir le nombre k sur laface cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres $p_1,~p_2,~p_3$ et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1,~p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.

2. On lance le dé trois lois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.

  a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

  b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

  a. Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

  b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

  c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.

  a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

  b. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).

  c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

68 Asie juin 2006

Retour au tableau

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : « Pierre gagne la n-ième partie ».
- P_n : « Pierre perd la n-ième partie ».

On pose : $p_n = p(\text{G}_n)$ et $q_n = p(\text{P}_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.

   a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{\text{G}_1}(\text{G}_2)$ et $p_{\text{P}_1}(\text{G}_2)$.

   b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.

2. Étude de la suite $\left(p_n\right)$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

69 Amérique du Nord juin 2006

Retour au tableau

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu.
Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 Le jeu est :

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable

Question 2 Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\dfrac{216}{625}$ B : $\dfrac{544}{625}$ C. $\dfrac{2}{5}$

Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\dfrac{4}{15}$ B : $\dfrac{11}{30}$ C. $\dfrac{11}{15}$

70 Liban mai 2006

Retour au tableau

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3. **Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0,2}$.**
2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

71 Pondichéry avril 2006

Retour au tableau

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999$. Ce test est-il fiable ?

72 Amérique du sud novembre 2005

Retour au tableau

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à $0,02$.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   a. si ce composant est défectueux ;
   b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard. Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
$$P(T \geqslant t) = 0,02\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}t} + 0,98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$: Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$. Pour $c \geqslant 0$, $P([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

73 Nouvelle–Calédonie novembre 2005

Retour au tableau

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes.***
La partie **I** est la démonstration d'un résultat de cours. La partie **II** est un Q.C.M.

Partie I
Question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie ***II*** *est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.
On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

$\boxed{A}\ \dfrac{75}{512}\quad \boxed{B}\ \dfrac{13}{56}\quad \boxed{C}\ \dfrac{15}{64}\quad \boxed{D}\ \dfrac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population.
Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0, 25.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

$\boxed{A}\ \dfrac{1}{120}\quad \boxed{B}\ \dfrac{3}{40}\quad \boxed{C}\ \dfrac{1}{12}\quad \boxed{D}\ \dfrac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Quelle est la variance de X ?

$\boxed{A}\ 2\quad \boxed{B}\ 13\quad \boxed{C}\ 16\quad \boxed{D}\ 17$

4. La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$:
$P(T < t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ (avec $\lambda = \dfrac{1}{6}$)
où t désigne le temps exprimé en minutes.
Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

$\boxed{A}\ 0,2819\quad \boxed{B}\ 0,3935\quad \boxed{C}\ 0,5654\quad \boxed{D}\ 0,6065$

74 Polynésie septembre 2005

Retour au tableau

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :
• si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
• si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
soit en C, soit en A de façon équiprobable
• si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.
On note A_n (respectivement $B_n,\ C_n$) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement $b_n,\ c_n$) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement $B_n,\ C_n$).
On a donc : $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0$. *Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.*

1. Calculer $a_k,\ b_k$ et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ a_n + b_n + c_n = 1$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & = \frac{1}{3}a_n \end{array}\right.$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel p,

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{array}\right.$$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

75 Antilles-Guyane septembre 2005

Retour au tableau

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de t.

   b. En déduire que le temps moyen est $\dfrac{1}{\lambda}$.
2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

76 Amérique du Nord juin 2005

Retour au tableau

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s). On définit les évènements suivants :
D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »
D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».
A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

   Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

77 Antilles–Guyane juin 2005

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies. 40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20 \times 0,75$ **c.** $0,75 \times (0,25)^{20}$

78 Asie juin 2005

Retour au tableau

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée. Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes. Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu. Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m. Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».
On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

  a. Calculer les probabilités $P(\text{V})$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

  b. On note $P_{\text{V}}(\text{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\text{V}}(\text{R})$ puis $P(\text{R} \cap \text{V})$.

  c. Calculer $P(\text{R})$.

  d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

  a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

  b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.

  c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = \dfrac{140 - 51m}{80}$.

  d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.
Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois.
On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

79 Centres étrangers juin 2005

Retour au tableau

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3. On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

- D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
- R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
- R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement R est $0,236$.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ? (on donnera la réponse arrondie au millième)

80 Métropole juin 2005

Retour au tableau

Pour les questions 1 *et* 2, *on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

  a. Déterminer la loi de probabilité de X.

  b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

  a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

  b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

  c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

  a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

  b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

81 La Réunion juin 2005

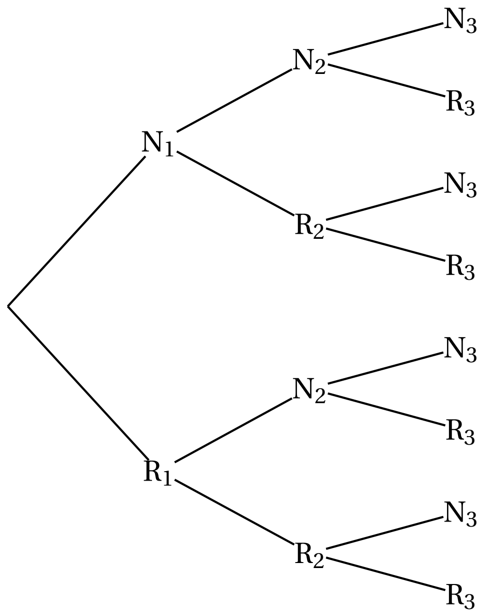
Retour au tableau

On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3. L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. **a.** Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.

   c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

82 Liban mai 2005

Retour au tableau

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication. Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ». On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.

b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

83 Nouvelle–Calédonie mars 2005

Retour au tableau

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets.
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p. Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

  a. Calculer l'espérance mathématique de X.

  b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

  c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

  a. Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1 - p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.

  b. Soit f la fonction définie sur $[0~;~1]$ par :
  $f(x) = (1 - x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.
  Montrer que f est strictement décroissante sur $[0~;~1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0~;~1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.

  c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.
  (On exprimera p en fonction de x_0).

84 Polynésie juin 2005

Retour au tableau

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :
A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ». On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,882$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.
   On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.
   On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
   Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

85 Amérique du Sud novembre 2004

Retour au tableau

On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note A_0 l'évènement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
   On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
   On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »

   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.

   b. En déduire $p(B_0)$.

   c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

   d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
   Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

86 Métropole septembre 2004

Retour au tableau

Partie A

1. Soit une particule au hasard.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,
   A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,
   B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,
   B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,
   C1 : « la particule entre dans K1 »,
   C2 : « la particule entre dans K2 ».
2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
   Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
   Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.
On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.
La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

87 La Réunion septembre 2004

Retour au tableau

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1,deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1 » ;
B : « Le dé amène un multiple de trois » ;
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le lui un multiple de trois » ;
N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

88 Polynésie septembre 2004

Retour au tableau

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés. Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3. Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1. On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et $(\text{C}, 4)$ admettent un barycentre. On le note G.
2. **a.** Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 « G appartient à la droite (BC) » ;
   E_2 « G appartient au segment [BC] ».

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1.**.
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0,999$.

89 Amérique du Nord juin 2004

Retour au tableau

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*
Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\text{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2. b.** ?

90 Métropole juin 2004

Retour au tableau

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\ ;\ 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-\lambda A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

   b. En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale ? la semaine près.

91 Liban juin 2004

Retour au tableau

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.

  a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?

  b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?

  c. On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

  En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0 ; 1]$.

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).

Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

92 Polynésie juin 2004

Retour au tableau

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.
   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?
   Rappel :
   Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0~;~+\infty[$, dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement :
   pour $0 \leqslant a \leqslant b,\ p([a~;~b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et
   pour $c \geqslant 0,\ p([c~;~+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

93 Pondichéry juin 2004

Retour au tableau

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,
- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1. »
B : « Le dé amène un multiple de trois. »
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »
N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

   a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

   b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

   c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

   d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

94 La Réunion juin 2004

Retour au tableau

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A} : \frac{\binom{120}{3}+\binom{5\,880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad \text{B} : \frac{3}{120}$$

$$\text{C} : \binom{10}{3} \times \left(\frac{120}{6\,000}\right)^3 \times \left(\frac{5\,880}{6\,000}\right)^7 \qquad \text{D} : \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{120}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$\text{A} : 0,98 \qquad \text{B} : \frac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02} \qquad \text{C} : 0,6\times 0,98 \qquad \text{D} : \frac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,5$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A} : \mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{B} : \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \qquad \text{C} : 1-\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{D} : \mathrm{e}^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : $\mathrm{E} = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

a. L'intégrale $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

$$\text{A} : \lambda\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \text{B} : -t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda} \qquad \text{C} : \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda \qquad \text{D} : t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531,24 D : 3 000

95 Amérique du Sud novembre 2003

Retour au tableau

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement $-1,\ 0,\ 0,\ 1$ et indiscernables au toucher. On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac. Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés. À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$. Sur le graphique joint en annexe, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On note $\mathscr{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.

2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».

Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

b. Tracer en couleur sur le graphique de l'annexe, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$. (On ne demande pas de justification).

c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathscr{P}$ ».

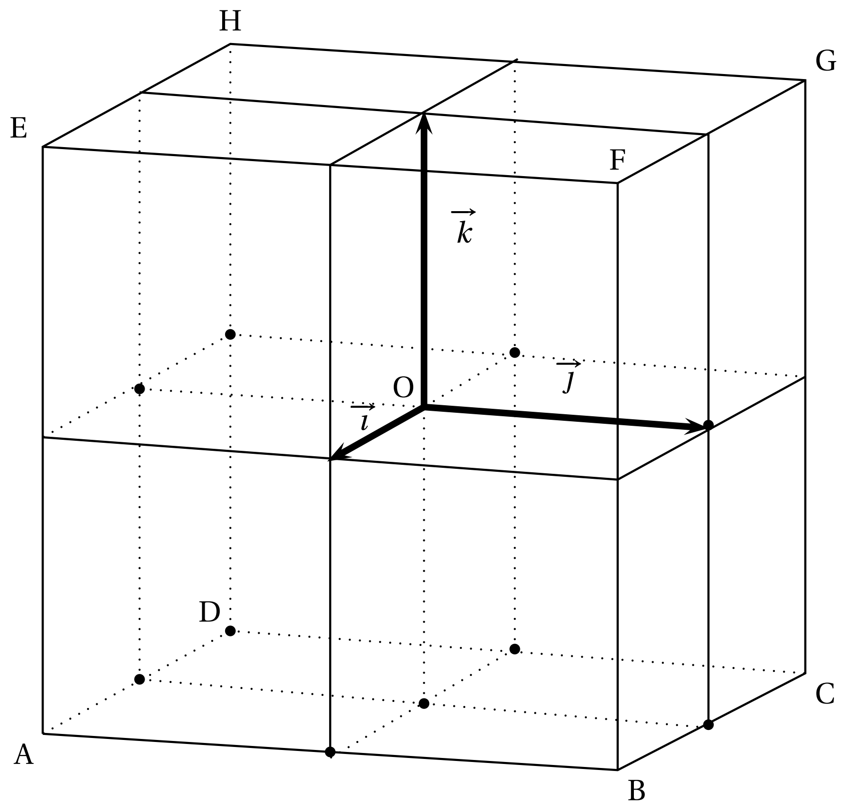
Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?

4. On désigne par $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{O}M \leqslant 1,5$).

On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».

Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.

Cette page ANNEXE sera complétée et remise avec la copie



96 Nouvelle–Calédonie novembre 2003

Retour au tableau

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\text{E}(S_n)$ est égale â 10. Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $\text{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. **a.** Établir l'égalité $\ln[\text{P}(S_n = 0)] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = 0) = \text{e}^{-10}$.

b. Démontrer que $\text{P}(S_n = k+1) = \text{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également

$\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k+1) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\text{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

97 Antilles–Guyane septembre 2003

Retour au tableau

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.
Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. **a.** Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.

Préciser l'espérance mathématique $\text{E}(X)$

Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.

Préciser l'espérance mathématique de S.

2. **a.** Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

Quelle est a probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k\cdot\binom{k}{13}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\text{P}_{13}.$$

Calculer ce gain.

d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

98 Métropole septembre 2003

Retour au tableau

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon.
On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face differe et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.
Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ».
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

- **a.** Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
- **b.** Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
- **c.** Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».

- **a.** Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
- **b.** Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
- **c.** Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

99 Amérique du Nord juin 2003

Retour au tableau

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule tant exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.
Toute réponse ambigüe sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0\,;\,t[$, notée $p([0\,;\,t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t. Cette loi est telle que $p([0\,;\,t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t\,;\,+\infty[)$ est :

a.	$1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$	**b.**	$\mathrm{e}^{-\lambda t}$	**c.**	$1+\mathrm{e}^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0\,;\,t[) = p([t\,;\,+\infty[)$ est :

a.	$\dfrac{\ln 2}{\lambda}$	**b.**	$\dfrac{\lambda}{\ln 2}$	**c.**	$\dfrac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

a.	$\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$	**b.**	$\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$	**c.**	$\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a.	$p([1\,;\,+\infty[)$	**b.**	$p([3\,;\,+\infty[)$	**c.**	$p([2\,;\,3[$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

a.	0,5523	**b.**	0,5488	**c.**	0,4512

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable alatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.
La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

a.	0,5555	**b.**	0,8022	**c.**	0,1607

100 Antilles–Guyane juin 2003

Retour au tableau

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à $0,02$. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.
2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
   - **a.** Définir la loi de X.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?
3. - **a.** Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.
     Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
   - **b.** Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.
4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

   $$f(x) = 0{,}000\,7\mathrm{e}^{-0{,}000\,7x}.$$

   Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

101 Centres étrangers juin 2003

Retour au tableau

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable alatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement. On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leqslant A) = \int_0^A \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millime.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

- **a.** comprise entre 50 et 100 km ;
- **b.** supérieure 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.

- **a.** Au moyen d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I}(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x$ où A est un nombre réel positif.
- **b.** Calculer la limite de $\mathrm{I}(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).

4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.
d tant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

- **a.** Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
- **b.** Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

102 La Réunion juin 2003

Retour au tableau

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes. Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d. Aucune justification n'est demandée pour cet exercice. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse. Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{4}$.

b. $\text{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}}$

c. $\text{P}(X < 5) = 1 - \text{P}(X > 5)$

d. $\text{E}(X) = 0,75n$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes : • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs. • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'évènement : **l'individu est malade** et T l'évènement : **le test pratiqué est positif**.

a. $\text{P}_{\text{M}}(\text{T}) + \text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 1,01.$

b. $\text{P}_{\text{M}}(\text{T}) + \text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = \text{P}(\text{T})$

c. $\text{P}(\text{T}) = 2,97 \cdot 10^{-2}$

d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(t) = \text{e}^{-0,01t}$

b. Pour tout réel t positif, $\text{P}(Y \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-0,01t}$

c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

103 Liban juin 2003

Retour au tableau

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2. On considère les évènements suivants :
B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.

b. Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

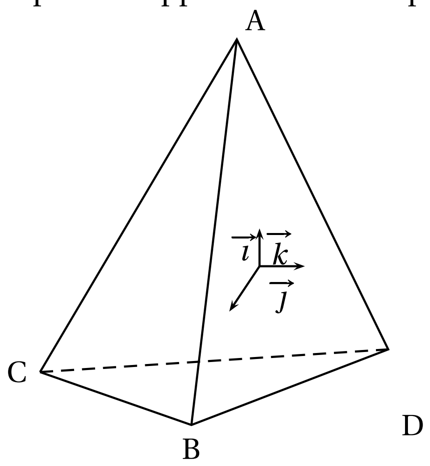
104 Polynésie juin 2003

Retour au tableau

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :
A$(0\,;0\,;3)$, B$(2\sqrt{2}\,;\ 0\,;\ -1)$, C$(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1)$, D$(-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{6}\,;-1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

105 Nouvelle–Calédonie mars 2003

Retour au tableau

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services. On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « La société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n. Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

• $p(I_1) = p_1 = 0,75$.

• Sachant qu'i ! y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,04$.

• Sachant qu'iI n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,64$. On rappelle que $\overline{\text{A}}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_{\text{B}}(\text{A})$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Partie 1

1. Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$ puis calculer $p\left(I_{n+1} \cap I_n\right)$ et $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right)$ en fonction de $p_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
2. En déduire $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,64$.
3. On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.

   a. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.

   c. Donner une valeur approchée de p_6 à 10^{-3} près par excès.

Partie 2

Le même mois, la société de maintenance installe un photocopieur dans 10 entreprises. Six mois plus tard, elle désire libérer une partie de son personnel afin de proposer un stage de mise à niveau.

On estime que la probabilité d'intervention du service de maintenance durant ce mois auprès de chacune de ces entreprises est égale à $0,373$.

Donner, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant ce mois (on supposera que les interventions dans les différentes entreprises sont des évènements indépendants).

106 Amérique du Sud décembre 2002

Retour au tableau

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

- **a.** Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
- **b.** Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
- **c.** Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

- **a.** Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3$^{\text{e}}$ boule tirée est noire » vaut $\dfrac{1}{4}$.
- **b.** Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

107 Nouvelle–Calédonie novembre 2002

Retour au tableau

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.
Soit X la variable alatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?

3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :
   - soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,
   - soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

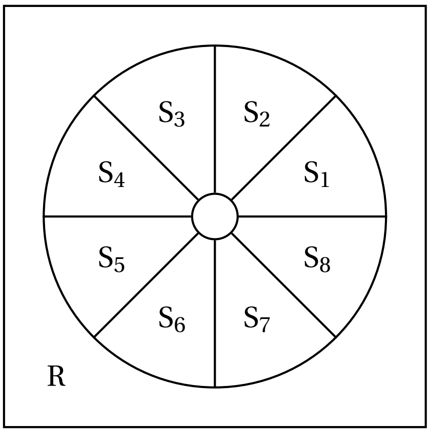
   Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

108 Métropole septembre 2002

Retour au tableau

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :

- un disque D de rayon 1 cm,
- 8 secteurs S_1, S_2, …, S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,
- une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.



On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle àl'aire de cette zone.

1. **a.** Déterminer la probabilité $p(\text{D})$ pour que le point soit placé dans le disque D.

b. Déterminer la probabilité $p(\text{S}_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $p(\text{D}) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$, $p(\text{S}_k) = 0{,}078\,5$.

À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :

- un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
- un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$;
- un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

On note X la variable alatoire égale au gain algébrique obtenu.

a. Calculer la probabilité $p(\text{R})$ pour que le point soit placé dans la zone R.
Calculer l'espérance de X.

b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0,9$.

109 Amérique du Nord juin 2002

Retour au tableau

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
   Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.
   La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).
   Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.
   a. Donner la loi de probabilité de N.
   b. Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance matématique de N soit nulle ?
2. À un concours un candidat doit répondre à un Q.C.M. de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II Répondre au Q. C. M. proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions. L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

1. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 : 180	Réponse 2 : 330	Réponse 3 : 110

2. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(\text{A}) = 0,4 \quad p(\text{B}) = 0,5 \quad p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0,35.$$

   Combien vaut $p(\text{A} \cap \text{B})$?

Réponse 1 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,1$	Réponse 2 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,25$	Réponse 3 : Les données sont insuffisantes pour répondre.

3. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que
   $p(\text{B} \cap \text{A}) = \dfrac{1}{6}$, $p_{\text{A}}(\text{B}) = 0,25$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut $p(\text{A})$?

Réponse 1 : $p(\text{A}) = \dfrac{2}{3}$	Réponse 2 : $p(\text{A}) = \dfrac{1}{24}$	Réponse 3 : $p(\text{A}) = \dfrac{1}{12}$

4. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \dfrac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

110 Antilles–Guyane juin 2002

Retour au tableau

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{10}$.
On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènement suivants :
   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
   B : « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\dfrac{1}{41}$.
3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

111 Asie juin 2002

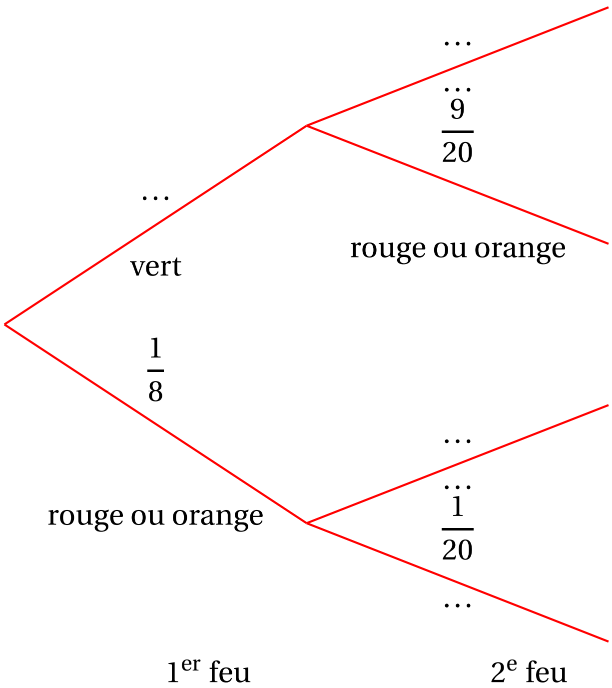
Retour au tableau

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement « Amélie est arrêtée par le n-ième feu rouge ou orange » et $\overline{E_n}$, l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge. Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$. On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $n+1$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième feu est rouge ou orange, vaut $\dfrac{1}{20}$.
- la probabilité que le $n+1$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}\left(E_{n+1}\right)$ et $p_{\overline{E_n}}\left(E_{n+1}\right)$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = \left(E_{n+1} \cap E_n\right) \cup \left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28 p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

112 Métropole juin 2002

Retour au tableau

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Soit $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a,\ -5,\ 1-a)$ et $(1+b,\ 1,\ b)$.

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,

B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,

C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »

a. Calculer les probabilités $p(\mathrm{A}_1)$, $p(\mathrm{B}_1)$ et $p(\mathrm{C}_1)$.

b. Exprimer $p(\mathrm{C}_{n+1})$ en fonction de $p(\mathrm{C}_n)$ et montrer que $p(\mathrm{C}_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $p(\mathrm{A}_{n+1})$ en fonction de $p(\mathrm{C}_n$ et en déduire que $p(\mathrm{A}_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. **a.** Déterminer la limite de $p(\mathrm{A}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(\mathrm{A}_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

113 La Réunion juin 2002

Retour au tableau

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$. La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(\text{A})$. On désigne par $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A. La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(\text{A}/\text{B})$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
soit P l'évènement : « on obtient PILE ».

  a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).

  b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
- si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
- dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.

On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».

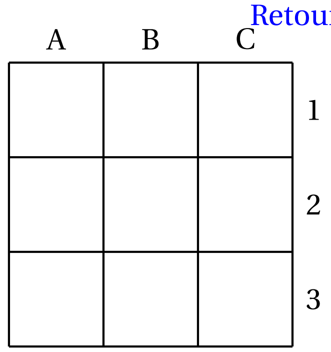
  a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?

  b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?

  c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

114 Polynésie juin 2002

Retour au tableau



On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

On note les évènements suivants :

- H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V : « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D. En déduire que la probabilité de N est égale à $\dfrac{19}{21}$.

2. On considère la variable aléatoire X définie par :

- $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
- $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
- $X = -2$, lorsque N est réalisé.

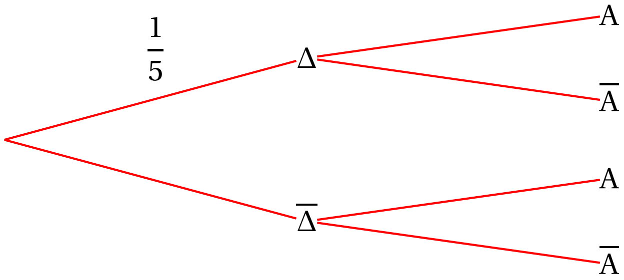
Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille. On note Δ l'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».

a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_\Delta(\text{H})$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(\text{V})$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(\text{D})$.

b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\dfrac{3}{28}$.

4. A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \dfrac{1}{5}$. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



115 Pondichéry juin 2002

Retour au tableau

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   a. Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.

   Pour chaque tirage :

   – si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,
   – si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

   On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

   On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance de X.

116 Amérique du Sud décembre 2001

Retour au tableau

On considère l'ensemble E = $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$. Avec deux chiffres disfincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $\boxed{x \mid y}$ ou $\boxed{y \mid x}$. Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z \mid z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.
2. On tire au hasard un domino.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?
3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
   Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\dfrac{4}{45}$ ».
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

117 Antilles–Guyane septembre 2001

Retour au tableau

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l l} f(x) & = & m\sin x & \text{pour } x \in [0~;~\pi]\\ f(x) & = & 0 & \text{sinon.}\end{array}\right.$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.
2. Représenter f dans un repère orthonormé.
3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
   Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.
4. Calculer la probabilité $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.
5. Calculer les probabilités $p(X \geqslant 0)$ et $p(X \leqslant 0)$.

118 Antilles–Guyane juin 2001

Retour au tableau

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles. Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie. Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner. G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».
Il participe ensuite à une loterie avec le même billet.
À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.
L_i désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».
L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».
P désigne l'événement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».
Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\dfrac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\dfrac{1}{490}$.

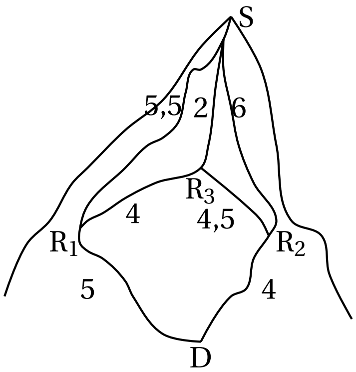
1. **a.** Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.
   c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
   La probabilité de l'évènement « $X = 90$ » est $\dfrac{2}{125}$.
   La probabilité de l'évènement « $X = 190$ » est $\dfrac{1}{250}$.
   a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\dfrac{1}{10}$.
   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.
   c. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.

119 Asie juin 2001

Retour au tableau

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours.
La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1 400 mètres sur les parcours existants ; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit.
On les appelle R_1 et R_2.
Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2 500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, ou atteindre le sommet directement.

La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\frac{1}{3}$. La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_1 est égale à $\frac{3}{4}$. La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_2 est égale à $\frac{2}{3}$.



1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 » ;
   E_2 « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 » ;
   E_3 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 » ;
   E_4 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(M,\ N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.
   On donne $d(\text{D}, \text{R}_1) = 5$; $d(\text{D}, \text{R}_2) = 4$; $d(\text{R}_1,\ \text{R}_3) = 4$; $d(\text{R}_2,\ \text{R}_3) = 4{,}5$; $d(\text{R}_3, \text{S}) = 2$;
   $d(\text{R}_1,\ \text{S}) = 5{,}5$; $d(\text{R}_2,\ \text{S}) = 6$.
   Soit X la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

120 Centres étrangers juin 2001

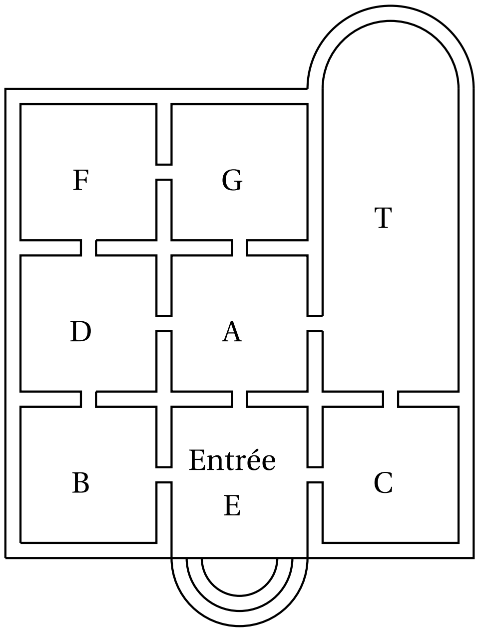
Retour au tableau

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organiseune exposition.
Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.
   a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.
   b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\dfrac{1}{6}$.
   c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».
   d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».
2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$.
   b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)
   c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
   Prouver qu'il a tort.

121 Métropole juin 2001

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm]. On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\text{M}_0,\ \text{M}_1,\ \text{M}_2, \cdots, \text{M}_{11}$.

2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{12}\right)}$.

3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}} z_n$. En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral. On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $\text{M}_0, \text{M}_1,\ \text{M}_2, \cdots, \text{M}_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

122 Liban juin 2001

Retour au tableau

Dans un village de montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent janais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour ciacune des deux familles.
On note :
E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».
F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathrm{P(E)}\ ,\ \mathrm{P(F/E)}\ ,\ \mathrm{P(F/\overline{E})}\ \text{puis}\ \mathrm{P(F \cap E)}\ \text{et}\ \mathrm{P(F \cap \overline{E})}.$$

En déduire P(F).

123 Polynésie juin 2001

Retour au tableau

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{\begin{array}{c}\text{1 gros rouge et 3 petits rouges}\\ \text{2 gros verts et 1 petit vert}\\ \text{1 petit jaune}\end{array}\right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».

a. Calculer la probabilité de A.

b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\dfrac{2}{7}$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.

a. Déterminer P_n en fonction de n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,99$.

124 Amérique du Sud novembre 2000

Retour au tableau

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(\text{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : **A** « Le point M est sur l'axe des abscisses » ; **B** « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».

3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\dfrac{4}{9}$.

4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan. Quelle est la probabilité de l'évènement suivant : **C** : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?

5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

125 Antilles–Guyane sept. 2000

Retour au tableau

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

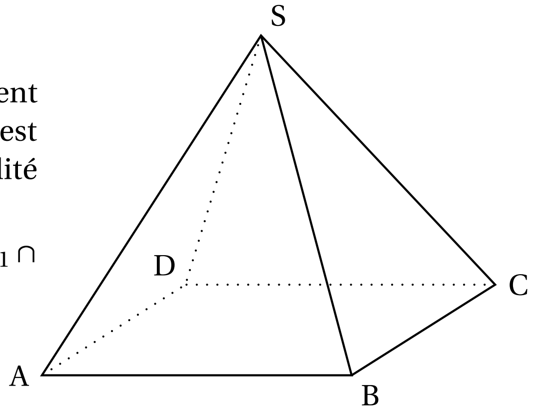
a. La fourmi se trouve en A. Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

• en A ? • en B ? • en C ? • en D ?

b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note : S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.

Donner p_1. En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right).$$



2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_1 & = & \dfrac{1}{3} \\ p_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}\left(1 - p_n\right) \end{array}\right. .$$

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n$.

126 Métropole septembre 2000

Retour au tableau

Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près*. Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
   - A_1 l'évènement « la personne est absente lors du premier appel » ;
   - R_1 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

   Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore $0,2$.

   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :

   A_2 l'évènement « la personne est absente lors du second appel » ;

   R_2 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;

   R l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

   Montrer que la probabilité de R est 0,176. (On pourra utiliser un arbre).

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

127 Polynésie septembre 2000

Retour au tableau

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leqslant k \leqslant 6$). Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables,
- les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
- les nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$ dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.

2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants : A : « le nombre obtenu est pair »B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

a. Déterminer la probabilité de l'évènement $\mathrm{G} \cap \mathrm{A}$, puis la probabilité de l'évènement G.

b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

128 Antilles–Guyane juin 2000

Retour au tableau

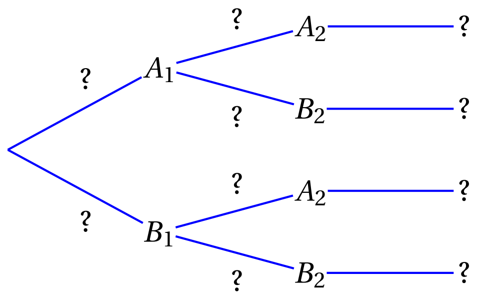
Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le fim B. Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le fim A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.
On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. **a.** Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$$p(A_2/A_1),\ p(A_2/B_1)\ et\ p(A_1 \cap A_2)$$

   c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



   d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B. On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

129 Asie juin 2000

Retour au tableau

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :
A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».
B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ». On pose $P_n = p(A_n)$.
Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{15}.$$

3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

130 Centres étrangers juin 2000

Retour au tableau

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions. Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

   a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

   E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

   b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées. Établir la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

131 Métropole juin 2000

Retour au tableau

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions. Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois. On note $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p(\text{A} / \text{B})$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».

Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_1)$.

b. On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_2/\text{T}_1)$, puis $p\left(\text{T}_2/\overline{\text{T}_1}\right)$. En déduire $p\left(T_2 \cap \text{T}_1\right)$ et $p\left(\text{T}_2 \cap \overline{\text{T}_1}\right)$. (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

132 Liban juin 2000

Retour au tableau

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. Dans les questions **1.** et **2.** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. »

B « Les trois boules sont de la même couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants : D « Tirer deux boules rouges. »E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

b. Calculer la probabilité de l'évènement E, $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geqslant \frac{1}{2}$?

133 Polynésie juin 2000

Retour au tableau

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

A : « Les quatre numéros sont identiques ».

B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».

C : « Tous les jetons sont blancs ».

D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».

E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a. Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\dfrac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.

c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B. On établit la règle de jeu suivante :

- Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
- Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
- Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
- Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.

Pour tous les autres tirages, il perd 5 F. G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

134 Pondichéry juin 2000

Retour au tableau

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.
Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.
2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé. En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i~;~j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i~;~j)$ la probabilité de cet évènement.
   a. Calculer $P(2~;~4)$.
   b. Calculer $P(4~;~5)$.

135 Amérique du Sud novembre 1999

Retour au tableau

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. **a.** Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

   b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série. À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil.

   Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3\}$, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

   Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

   L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4.

   On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $P(E_n) = 32 \times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

   a. Calculer la probabilité $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

   b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P(C/E_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ? En déduire la probabilité $P(C \cap E_0)$.

   c. Déterminer de même $P(C/E_n)$ puis $P(C \cap E_n)$ pour tout élément n de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. En déduire $P(C)$.

   d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

136 Antilles–Guyane sept. 1999

Retour au tableau

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

   a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

   b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant x boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B.

On procède à l'expérience E :

On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

   a. Pour cette question **a.**, on prend $x = 6$. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à :

$$\frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right).$$

   c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\overline{\text{M}}$?

137 Métropole sept. 1999

Retour au tableau

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :

On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

   a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.

   b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?

2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

   a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.

   Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

138 Sportifs haut-niveau sept. 1999

Retour au tableau

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.
On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
2. **a.** Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?

   b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\dfrac{68}{165}$.
3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

Livret réalisé grâce à Cocoa booklet. Merci à son auteur Fabien Cornus.
http ://www.iconus.ch/fabien/cocoabooklet/